مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی





محافل ریاضی

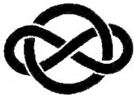
(تجربهٔ روس‌ها)

تألیف د. فومین / س. گنکین / ای. ایتنبرگ
ترجمهٔ ارشک حمیدی / مهرداد مسافر

انتشارات فاطمی

کتاب **محافل ریاضی** دربردارندهٔ سنت پرباری است که از فعالیتهای فـوق برنامهٔ ریاضی در اتحـاد شـوروی سابق، به‌ویژه شهر لنینـگراد، برجا مانده است. هر فصل این کتاب طوری نوشته شده است که خواننده ضمن آشنایی با موضوع، تواناییـهای بیشتری در مسأله حل‌کردن هم به‌دست بیاورد. علاوه بر این، کتاب الگویی مناسب برای برگزاری جلسات و محافل ریاضی در اختیار معلمان می‌گذارد.
مطالعهٔ این کتاب برای دانش‌آموزان علاقه‌مند به شرکت در مسابقه‌هایی از نوع المپیادهای ریاضی، معلمان و سایر علاقه‌مندان مفید است.

مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی



زیرنظر :

یحیی تابش

عضوهیأت علمی دانشگاه صنعتی شریف

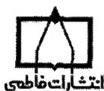
عضوکمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی

امید علی کرمزاده

عضو هیأت علمی‌دانشگاه شهید چمران (اهواز)

عضو کمیتهٔ ملی المپیاد ریاضی

از کتابهای این مجموعه

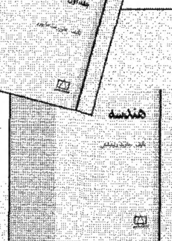


کتابهای زرد

- نظریهٔ اعداد
- هندسه
- جبر
- ترکیبیات
- هنر مسأله حل‌کردن

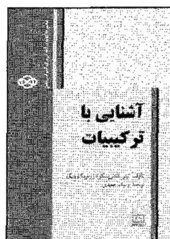






کتابهای نارنجی

- هندسهٔ مسطحه
- پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو
- از اردوش تا کی‌یف
- دایره‌ها
- فنون مسأله حل‌کردن
- محافل ریاضی
- مباحثی از هندسه
- ۱۰۲ مسألهٔ ترکیبیات
- ۱۰۱ مسألهٔ جبر
- آشنایی با ترکیبیات



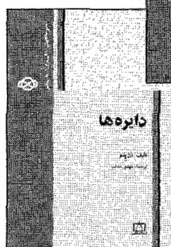


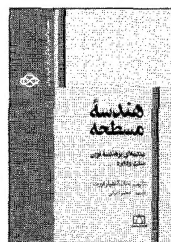












کتابهای قرمز

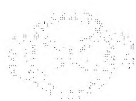
- حل مسأله از طریق مسأله
- برگزیدهٔ مسأله‌های جبر و آنالیز
- المپیادهای ریاضی چین







مجموعهٔ کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی



محافل ریاضی

(تجربهٔ روس‌ها)

تألیف د. فومین / س. گنکین / ای. ایتنبرگ

ترجمهٔ ارشک حمیدی / مهرداد مسافر

انتشارات فاطمی

Mathematical Circles
(Russian Experience)
Dmitri Fomin/Sergey Genkin/Ilia Itenberg
American Mathematical Society

مدیر تولید: فرید مصلحی
حروفچینی و صفحه‌بندی: سپیده آذروند،
زهرا حلاج
طراح جلد: زهرا قورچیان

رسامی: فاطمه ثقفی
نظارت بر چاپ: علی محمدپور
چاپ و صحافی: خاشع

محافل ریاضی
(تجربهٔ روسها)

مؤلفان: دمیتری فومین، سرگی گنکین، ایلیا ایتنبرگ
مترجمان: ارشک حمیدی، مهرداد مسافر
ناشر: انتشارات فاطمی
چاپ سوم، ۱۳۹۱
شمارگان: ۲۰۰۰ نسخه
قیمت: ۷۸۰۰ تومان
شابک ۲_۴۳۸_۳۱۸_۹۶۴
ISBN 964-318-438-2

انتشارات فاطمی تهران، میدان دکتر فاطمی، خیابان جویبار، خیابان میرهادی،
شمارهٔ ۱۴، کدپستی ۱۴۱۵۸۸۴۷۴۱، تلفن: ۸۸۹۴۵۵۴۵ (۲۰ خط)
www.fatemi.ir • info@fatemi.ir



فامین، دیمتری ولادیمیروویچ، ۱۹۶۵ - م. **Fomin, Dmitri Vladimirovich**
محافل ریاضی/مؤلفان دیمتری فامین، سرگی گنکین، ایلیا ایتنبرگ؛ مترجمان ارشک حمیدی، مهرداد مسافر.ــ تهران: فاطمی، ۱۳۸۶.
دوازده، ۳۴۸ ص.: مصور.ــ (مجموعه کتابهای آمادگی برای المپیاد ریاضی)
ISBN 964-318-438-2
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
چاپ سوم: ۱۳۹۱
عنوان به انگلیسی: Mathematical circles: (Russian Experience), c1996.
۱. ریاضیات -- سرگرمی‌ها. الف. گنکین، سرگی آلکساندروویچ، Genkin, Sergei Aleksondrovich. ب. ایتنبرگ، ایلیا ولادیمیروویچ، ۱۹۶۶ - ، Itenberg, I.V. (Ilia Vladimirovich). ج. حمیدی، ارشک، ۱۳۵۲ - ، مترجم. د. مسافر، مهرداد، مترجم. هـ. عنوان.
QA۹۵/گ۸۷م۳ ۱۳۸۶ ۷۹۳/۷۴
کتابخانهٔ ملی ایران ۱۰۳۶۲۳۸

فهرست

به‌نام خدا

آمادگی برای المپیاد ریاضی

تلاشهای گسترده‌ای که در سالهای اخیر برای بهبود وضعیت آموزش ریاضیات در سطوح مختلف صورت گرفته است دو هدف عمده پیش روی خود دارد: **عمومی کردن ریاضیات و تربیت نخبگان**. هدف اول از این رو اهمیت دارد که در آستانهٔ قرن بیست‌ویکم میلادی «سواد ریاضی» ضرورتی عام پیدا کرده است، و هدف دوم نیز از هدفهای ارزشمند جوامع مدنی است. لذا کاملاً ضروری است که در پی دست یافتن به پیشرفتهای بیشتری در این باره باشیم و ابزارهای جدیدی برای شناسایی و پرورش استعدادهای بالقوهٔ جامعهٔ خود جستجو کنیم.

آموزشهای رسمی با توجه به گستردگی پهنهٔ عملکرد، معمولاً میانگین دانش‌آموزان را از نظر علاقه و استعدادهای ویژه مخاطب خود قرار داده است. از این‌رو برای پرورش استعدادها و شکوفایی خلاقیتها، آموزشهای جانبی و غیررسمی و برنامه‌هایی نظیر **المپیاد ریاضی** اهمیت ویژه‌ای دارد.

اگر به تاریخ نگاهی بیفکنیم سال ۱۸۹۴ شاید نقطهٔ آغاز مسابقات علمی در عصر جدید باشد. در این سال **مسابقهٔ اتووش** به نام **بارون لوراند اتووش**[1] به‌صورت مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در مجارستان شروع شد. مسائل این مسابقه به دلیل سادگی مفاهیم به‌کارگرفته شده هنوز هم جذاب است. پس از آن، طی سالها، مسابقات ریاضی در کشورهای مختلف جهان شکل گرفت و جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد تا اینکه در سال ۱۹۵۹ رومانی پیشگام راه‌اندازی **المپیاد بین‌المللی ریاضی** شد و از ۷ کشور اروپای شرقی برای شرکت در این المپیاد دعوت کرد و اولین المپیاد از ۲۰ تا ۳۰ ژوئیهٔ ۱۹۵۹ در بخارست برگزار شد. کم‌کم کشورهای دیگری نیز به المپیاد بین‌المللی پیوستند و در حال حاضر این مسابقه، که هر سال در یک کشور برگزار می‌شود، معتبرترین مسابقهٔ بین‌المللی دانش‌آموزی است.

مسابقات دانش‌آموزی در کشور ما نیز رفته‌رفته جایگاه ویژه‌ای یافته است؛ اولین مسابقهٔ ریاضی دانش‌آموزی در فروردین ۱۳۶۲ بین دانش‌آموزان برگزیدهٔ سرتاسر کشور برگزار شد و برای اولین بار در

1. Baron Loránd Eötvös

سال ۱۳۶۶ تیمی از کشورمان به المپیاد بین‌المللی اعزام گردید. پس از آن دانش‌آموزان زیادی در سرتاسر کشور مشتاقانه به این رقابت روی آوردند.

در المپیاد ریاضی آنچه اهمیت دارد توانایی مسأله حل کردن است، ولی باید توجه داشت که راه‌حل مسأله‌ای با ارزش به‌ندرت آسان و بدون زحمت به‌دست می‌آید؛ بلکه حاصل ساعتها تلاش فکری است. تلاشی که ذهنهای شاداب و جوان برای انجام آن تمایل بسیاری دارند.

بدیهی است که اگر این تلاشها با برنامه‌ای دقیق و منظم شکل گیرد، سریعتر و بهتر به شکوفایی استعدادهای خلاق می‌انجامد. از این رو **مؤسسهٔ انتشارات فاطمی** به انتشار مجموعهٔ **آمادگی برای المپیاد ریاضی** اهتمام ورزیده است. این مجموعه شامل سه دسته کتاب است:

دستهٔ اول (کتابهای زرد) شامل کتابهایی مقدماتی با پیشنیاز ریاضیات ۲ در زمینه‌های ترکیبیات، هندسه، نظریهٔ اعداد، آنالیز و جبر است.

دستهٔ دوم (کتابهای نارنجی) شامل کتابهای پیشرفته‌تر و مجموعهٔ مسائل وکتابهای کلاسیک المپیاد ریاضی در سطح بین‌المللی است، و بالاخره

دستهٔ سوم (کتابهای قرمز) شامل کتابهای پیشرفته دربارهٔ المپیاد ریاضی است.

مجموعهٔ آمادگی برای المپیاد ریاضی مجموعه‌ای است منظم و برنامه‌ریزی‌شده برای همهٔ چالشگرانی که در ریاضیات زیباشناختی خاصی می‌بینند و در جهت نوآوریهای ذهنی تلاش می‌کنند.

* * *

کتاب حاضر از دستهٔ دوم است. این کتاب حاصل تجربه‌هایی است که معلمان و ریاضیدانان برجسته طی سالیان متمادی سرکلاسهای فوق برنامهٔ ریاضی در شهر لنینگراد (سنت پترزبورگ) به‌دست آورده‌اند.

لنینگراد خاستگاه المپیادهای ریاضی است. نتایج درخشانی که دانش‌آموزان این شهر در مسابقه‌های ریاضی کسب می‌کنند و ریاضیدانان برجسته‌ای که این شهر پرورش داده است حاصل برگزاری منظم این‌گونه کلاسها است.

پیشگفتار

این کتاب اصولاً برای کمک به کسانی نوشته شده است که در اتحاد شوروی سابق دست‌اندرکار آموزشهای فوق برنامهٔ ریاضی بوده‌اند: معلمان مدارس، استادان دانشگاه که با برنامه‌های آموزش ریاضی سروکار دارند، علاقه‌مندان به برپایی محافل ریاضی، یا کسانی که دوستدار مطالعهٔ مطالبی هستند که هم ریاضی است هم سرگرم‌کننده. بی‌شک، دانش‌آموزان هم می‌توانند خودشان از این کتاب استفاده کنند.

دلیل دیگر نگاشتن این کتاب، اعتقاد ما بر لزوم ثبت و ضبط کردن نقشی است که سنت آموزش ریاضی لنینگراد (سنت پترزبورگ فعلی) طی شصت سال گذشته ایفا کرده است. با اینکه شهر ما خاستگاه المپیادهای ریاضی در اتحاد جماهیر شوروی بوده است (نخستین سمینارهای دانش‌آموزی در (۳۲ـ۱۹۳۱) و اولین المپیاد شهری در سال ۱۹۳۴ در این شهر برگزار شده است.) و هنوز هم از پیشگامان این عرصه است، اما تجربیات آموزشی گرانبار آن به‌قدر کافی برای استفادهٔ علاقه‌مندان ثبت نشده است.

هر چند که تنوع مطالب مطرح شده در این کتاب زیاد است، اما روش آموزشی آن همگون است. معتقدیم که این کتاب همهٔ مطالب اصلی برای جلسات محافل ریاضی در دو سال نخست آموزشهای فوق‌برنامه (برای دانش‌آموزان ۱۴ـ۱۲ ساله) را دربر دارد. هدف اصلی ما فراهم کردن مطالب قابل مطرح‌شدن در جلسات و جمع‌آوری مسائل ساده برای معلمان (یا کسانی که علاقه‌مندند زمانی را صرف یاددادن ریاضیات غیرمعمول به دانش‌آموزان کنند) بوده است. می‌خواستیم دربارهٔ ایده‌هایی از ریاضیات صحبت به میان آوریم که دانستن آنها برای دانش‌آموزان مهم است، و نیز اینکه چگونه می‌توان توجه دانش‌آموزان را به آنها جلب کرد.

باید تأکید کنیم که آماده کردن و رهبری چنین جلساتی خودش کاری خلاقانه است. بنابراین، پیروی کورکورانه از توصیه‌های ما نامعقول است. با این همه، امیدواریم این کتاب مطالب بیشتر جلسات شما را فراهم آورد. استفاده از این کتاب به روش زیر مناسب‌تر است: هنگام بررسی موضوعی خاص، معلم

فصل مربوط در این کتاب را بخواند و آن را تحلیل کند، سپس برنامه‌ای را برای جلسهٔ موردنظر طراحی کند. البته، گاهی لازم است متناسب با سطح دانش‌آموزان مطالبی تکمیلی را اضافه کرد.

مایلیم که دو ویژگی بارز سنت فعالیتهای فوق‌برنامهٔ آموزش ریاضی لنینگراد را خاطرنشان کنیم:

(۱) در جلسات به گفتگوی پرشور میان دانش‌آموزان و معلمان اهمیت زیادی داده می‌شود، حتی اگر ممکن باشد به وضعیت هر دانش‌آموز جداگانه رسیدگی می‌شود.

(۲) فعالیتها از سنین نسبتاً پایین شروع می‌شوند: معمولاً در سال ششم (۱۲ـ۱۱ سالگی) و گاهی حتی زودتر.

این کتاب به عنوان راهنمای ویژهٔ دانش‌آموزان دبیرستانی و معلمان آنها نگاشته شده است. بی‌شک، سن دانش‌آموزان در نحوهٔ برگزاری جلسات مؤثر است. بنابراین، چند پیشنهاد داریم:

الف) برای دانش‌آموزان کم سن و سال برگزاری جلسه‌ای طولانی را که فقط به یک موضوع اختصاص دارد مناسب نمی‌دانیم. معتقدیم که عوض‌کردن بحث حتی در یک جلسه هم مفید است.

ب) لازم است گهگاه مطالبی که قبلاً خوانده شده یادآوری شود. می‌توان این کار را با استفاده از مسأله‌هایی که در المپیادها یا مسابقات ریاضی دیگر مطرح شده انجام داد (پیوست (الف) را ببینید).

ج) سعی کنید در بررسی هر موضوع به اصلی‌ترین نتایج بپردازید و مطمئن شوید که این نتایج و ایده‌ها کاملاً درک شده‌اند (نه اینکه فقط به‌خاطر سپرده شده‌اند!).

د) توصیه می‌کنیم که در هر جلسه همواره از فعالیتهای غیرمعمول و «بازی‌گونه» در کنار بررسی کامل راه‌حلها و اثباتها استفاده کنید. همچنین استفاده از مسأله‌های تفریحی و مطالب بامزهٔ ریاضی مهم است.

* * *

این کتاب از این پیشگفتار، دو بخش اصلی، پیوست (الف) با عنوان «مسابقه‌های ریاضی» و پیوست (ب) با عنوان «پاسخ، راهنمایی، راه‌حل» تشکیل شده است.

بخش اول («سال اول») با فصل صفر آغاز می‌شود که از سؤالهایی که بیشتر مربوط به دانش‌آموزان ۱۱ـ۱۰ ساله‌اند تشکیل شده است. مسأله‌های این فصل ظاهراً محتوای ریاضی ندارند، و هدف اصلی از مطرح‌کردن آنها نشان‌دادن توانایی دانش‌آموزان در ریاضی و منطق است. باقی‌ماندهٔ این بخش به هشت فصل تقسیم شده است. هفت فصل اول اینها مربوط به موضوعهایی خاص‌اند و هشتمین فصل (با عنوان «مسأله‌هایی برای سال اول») صرفاً گردایه‌ای از مسأله‌هایی با موضوعات مختلف است.

بخش دوم («سال دوم») از نه فصل تشکیل شده است که برخی از آنها دنبالهٔ مطالبی هستند که در بخش اول آمده‌اند (مثلاً، فصلهای «گرافها ـ ۲» و «ترکیبیات ـ ۲»). بقیهٔ فصلها هم شامل مطالبی هستند که برای سال اول دشوارند: «ناورداها»، «استقرا» و «نابرابریها».

پیوست (الف) دربارهٔ پنج نوع از مسابقات ریاضی است که در اتحاد شوروی سابق رونق داشته‌اند. این مسابقات را می‌توان در جلسات محافل ریاضی برگزار کرد یا بین محافل ریاضی مختلف یا حتی مدارس ترتیب داد.

* * *

(۱) مسأله‌های دشوارتر را با علامت ستاره (*) مشخص کرده‌ایم.

(۲) در پیوست (ب) تقریباً برای همهٔ مسأله‌ها یا راه‌حل کاملشان را آورده‌ایم یا دست‌کم راهنمایی برای راه‌حل یا پاسخ آنها را. اگر مسأله‌ای محاسباتی باشد، معمولاً فقط پاسخ را ذکر کرده‌ایم. راه‌حل مسأله‌هایی را که خواسته‌ایم خواننده خودش راه‌حل را پیدا کند نیاورده‌ایم (این موضوع، به ویژه، در مورد فصلهای ۸ و ۱۷ درست است).

فصل ۰

فصل صفر

در این فصل ۲۵ مسألهٔ ساده آورده‌ایم. برای حل کردن این مسأله‌ها بجز عقل سلیم و ساده‌ترین مهارتهای محاسباتی چیز دیگری لازم نیست. از این مسأله‌ها می‌توان در جلسات محافل ریاضی برای سنجش میزان توانایی دانش‌آموزان در ارائهٔ استدلالهای منطقی و به‌طور کلی استعداد ریاضیشان یا به‌عنوان مسأله‌های سرگرم‌کننده استفاده کرد.

* * *

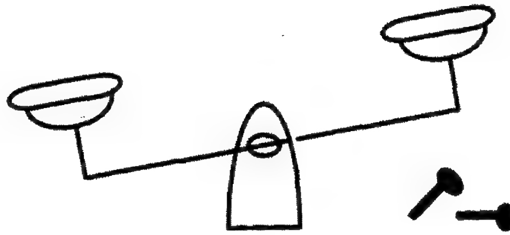
مسألهٔ ۱. تعدادی باکتری در ظرفی شیشه‌ای گذاشته شده‌اند. یک ثانیه بعد هر باکتری به دو تا تقسیم می‌شود، یک ثانیه بعد از آن هر یک از باکتریهای حاصل هم به دو باکتری تقسیم می‌شود و همین‌طور تا آخر. بعد از یک دقیقه ظرف پر می‌شود. چه وقت نصف ظرف پر شده است؟

مسألهٔ ۲. آنا، جان و آلکس سوار اتوبوس دیسنی‌لند می‌شوند. هرکدام از آنها باید ۵ بلیت به‌عنوان کرایه بدهد، اما آنها فقط بلیتهایی به‌ارزش ۱۰، ۱۵ و ۲۰ دارند (هر یک تعدادی نامحدود از هر نوع بلیت دارد). چطور می‌توانند کرایه‌شان را بپردازند؟

مسألهٔ ۳. جک چند برگِ متوالی از کتابی را کند. شمارهٔ نخستین صفحهٔ کنده شده ۱۸۳ است و می‌دانیم شمارهٔ آخرین صفحهٔ کنده شده هم با همین رقمها منتها به‌ترتیبی دیگر نوشته شده است. جک چند صفحه از کتاب را کنده است؟

مسألهٔ ۴. در یک گونی ۲۴ کیلوگرم میخ وجود دارد. آیا می‌توان فقط با استفاده از یک ترازوی دوکفه‌ای ۹ کیلوگرم میخ از گونی برداشت؟ (شکل ۱ را ببینید.)

مسألهٔ ۵. هزارپایی از زمین به‌راه می‌افتد و از تیرکی چوبی به بلندی ۷۵ سانتیمتر به‌طرف بالا می‌خزد.



شکل ۱

هر روز ۵ سانتیمتر به‌طرف بالای تیرک می‌خزد و هر شب ۴ سانتیمتر به‌طرف پایین آن سُر می‌خورد. چه وقت برای اولین بار به بالای تیرک می‌رسد؟

مسألهٔ ۶. یک سال، ماه ژانویه درست چهار تا جمعه و چهار تا دوشنبه داشت. بیستم ژانویهٔ آن سال چه روزی از هفته بوده است[1]؟

مسألهٔ ۷. در جدولی مستطیلی شکل که از ۹۹۱ × ۱۹۹ مربع کوچک برابر تشکیل شده است هر قطر از چند خانه (مربع) می‌گذرد؟

مسألهٔ ۸. از عدد

۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵

۱۰ رقم را طوری خط بزنید که عدد باقی‌مانده بزرگترین عدد ممکن باشد.

* * *

مسألهٔ ۹. پیتر می‌گوید: «پریروز ۱۰ ساله بودم اما سال بعد ۱۳ ساله می‌شوم.» آیا چنین چیزی ممکن است؟

مسألهٔ ۱۰. گربهٔ پیت همیشه قبل از بارندگی عطسه می‌کند. گربه امروز عطسه کرد؛ پیت خیال می‌کند «عطسهٔ گربه نشانهٔ آن است که امروز باران می‌بارد.» آیا حق با اوست؟

مسألهٔ ۱۱. معلمی روی یک برگ کاغذ چند دایره می‌کشد. سپس از دانش‌آموزی می‌پرسد: «چند دایره در این صفحه وجود دارد؟» دانش‌آموز پاسخ می‌دهد: «هفت‌تا.» معلم می‌گوید: «درست است.» و بعد از دانش‌آموز دیگری می‌پرسد: «بگو ببینم چند دایره در این صفحه وجود دارد؟» دانش‌آموز پاسخ می‌دهد: «پنج‌تا.» معلم باز هم می‌گوید: «کاملاً درست است.» واقعاً چند دایره روی این برگ کاغذ کشیده شده است؟

مسألهٔ ۱۲. پسر پدر استاد دانشگاهی با پدر پسر آن استاد صحبت می‌کند و خود استاد در این گفتگو شرکت ندارد. آیا چنین چیزی ممکن است؟

---

۱. ماه ژانویه ۳۱ روزه است.

مسألهٔ ۱۳. سه لاک‌پشت در امتداد راهی مستقیم می‌خزند و در یک جهت پیش می‌روند. لاک‌پشت اول می‌گوید: «دو لاک‌پشت دیگر پشت سرم هستند.» دومی می‌گوید: «یک لاک‌پشت پشت سرم و یکی دیگر جلوی من است.» لاک‌پشت سوم می‌گوید: «دو لاک‌پشت جلوتر از من‌اند و یکی دیگر پشت سرم است.» چطور چنین چیزی ممکن است؟

مسألهٔ ۱۴. سه دانشمند در واگن قطاری نشسته‌اند. قطار به‌مدت چند دقیقه از تونلی می‌گذرد و واگن در تاریکی فرو می‌رود. وقتی از تاریکی بیرون می‌آیند هر یک از آنها می‌بیند که صورت همکارانش با دوده‌ای که به‌سرعت از پنجرهٔ باز تو آمده، سیاه شده است. آنها شروع می‌کنند به یکدیگر خندیدن که ناگهان آن‌که از دو نفر دیگر باهوشتر است می‌فهمد که صورت خودش هم باید کثیف شده باشد. چطور به این نتیجه رسیده است؟

مسألهٔ ۱۵. سه قاشق شیر از یک لیوان شیر برمی‌داریم و توی یک لیوان چای می‌ریزیم و مایع حاصل را حسابی به‌هم می‌زنیم. بعد از این مخلوط سه قاشق برمی‌داریم و در لیوان شیر می‌ریزیم. اکنون کدام عدد بزرگتر است: درصد شیر در چای یا درصد چای در شیر؟

* * *

مسألهٔ ۱۶. با رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ مربعی جادویی بسازید؛ یعنی این عددها را در خانه‌های جدولی 3×3 طوری قرار دهید که مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و هر یک از دو قطر همگی با هم برابر باشند.

مسألهٔ ۱۷. در یک مسألهٔ جمع حساب حروف را جایگزین رقمها می‌کنیم (به‌جای رقمهای برابر، حروف یکسان و به‌جای رقمهای متمایز حروف مختلف می‌گذاریم). نتیجه این می‌شود که

$$\text{LOVES} + \text{LIVE} = \text{THERE}$$

بیشترین مقدار ممکن THERE کدام است؟

مسألهٔ ۱۸. سازمان اطلاعات و امنیت روسیه پیغامی رمزی را که از یکی از جمهوریها ارسال شده بود رهگیری کرده است. این پیغام چنین خوانده می‌شود

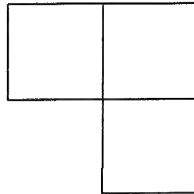
$$\text{BLASE} + \text{LBSA} = \text{BASES}$$

می‌دانیم که در به رمز نوشتن پیغامها رقمهای برابر به حروف یکسان تبدیل می‌شوند و رقمهای متمایز به حروف مختلف. برای این معما از دو کامپیوتر بزرگ دو جواب مختلف به‌دست آمده است. آیا چنین چیزی ممکن است یا یکی از آنها را باید تعمیر کرد؟

مسألهٔ ۱۹. ۱۲۷ اسکناس یک‌دلاری را بین ۷ کیف پول طوری تقسیم کنید که بتوان هر مبلغی از ۱ دلار تا ۱۲۷ دلار را که برحسب دلار عددی صحیح است، بدون بازکردن کیف پولها پرداخت.

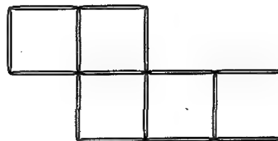
* * *

مسألهٔ ۲۰. شکل زیر را به چهار تا شکل طوری تقسیم کنید که هر یک از آنها مشابه شکل اصلی و ابعادش نصف آن باشد.



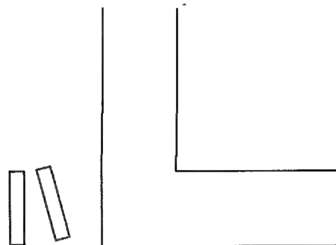
شکل ۲

مسألهٔ ۲۱. تعدادی چوب‌کبریت به شکل زیر چیده شده‌اند. دو تا از این چوب‌کبریتها را طوری جابه‌جا کنید که این شکل به چهار تا مربع تبدیل شود که هر ضلع هر یک از آنها یک چوب کبریت باشد.



شکل ۳

مسألهٔ ۲۲. رودخانه‌ای به‌عرض ۴ متر در جایی 90° تغییر مسیر داده است (شکل ۴ را ببینید). آیا می‌توان فقط با دو تکه الوار که طول هر یک از آنها ۳٫۹ متر است، روی رودخانه پل زد و از آن گذشت؟

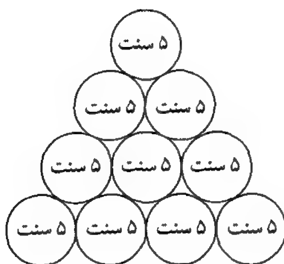


شکل ۴

مسألهٔ ۲۳. آیا می‌توان شش مداد بلند و گرد را طوری چید که هر یک از آنها با همهٔ مدادهای دیگر تماس داشته باشد؟

مسألهٔ ۲۴. با استفاده از قیچی در یک برگ کاغذ معمولی (مثلاً به‌اندازهٔ همین صفحه) سوراخی ایجاد کنید که فیلی بتواند از آن رد شود.

مسألهٔ ۲۵. ده سکه مانند شکل ۵ چیده شده‌اند. کمترین تعداد سکه‌هایی که باید برداریم تا مطمئن شویم که از سکه‌های باقی‌مانده هیچ سه‌تایشان در رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع قرار ندارند چقدر است؟



شکل ۵

فصل ۱

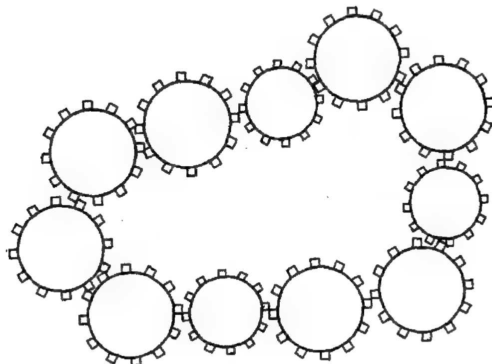
زوجیت

می‌گوییم زوجیت عددی زوج، زوج است و زوجیت عددی فرد، فرد. با مفهومی به این سادگی می‌توان مسأله‌های گوناگونی را حل کرد. کارایی این روش در حل بسیاری از مسأله‌ها، از جمله برخی مسأله‌های به‌غایت دشوار، ثابت شده است.

به‌دلیل سادگی زیاد این مبحث است که می‌توان مسأله‌هایی جالب برای دانش‌آموزانی طرح کرد که تقریباً هیچ پیش‌زمینه‌ای در ریاضیات ندارند. همین سادگی باعث می‌شود که نشان دادن ایدهٔ مشترک در همهٔ مسأله‌هایی از این دست حتی از بقیهٔ مواقع ضروری‌تر به‌نظر برسد.

۱. یکی در میانها

مسألهٔ ۱. در صفحه‌ای یازده چرخ‌دنده به‌شکل زیر (شکل ۶ را ببینید.) در یک زنجیره چیده شده‌اند. آیا ممکن است که همهٔ این چرخ‌دنده‌ها با هم بچرخند؟



شکل ۶

راه‌حل. پاسخ منفی است. فرض کنید که چرخ‌دندهٔ اول ساعتگرد بچرخد. در این صورت چرخ‌دندهٔ دوم باید پادساعتگرد بچرخد، سومی باز ساعتگرد، چهارمی پادساعتگرد و همین‌طور تا آخر. روشن است که چرخ‌دنده‌های «فرد» باید ساعتگرد بچرخند و چرخ‌دنده‌های «زوج» پادساعتگرد. اما در این صورت چرخ‌دنده‌های اول و یازدهم باید در یک جهت بچرخند که این تناقض است.

ایدهٔ اصلی در راه‌حل این مسأله این است که چرخ‌دنده‌هایی که ساعتگرد می‌چرخند و چرخ‌دنده‌هایی که پادساعتگرد می‌چرخند یکی در میان قرار دارند. یافتن چیزهایی که یکی در میان قرار دارند ایدهٔ اصلی راه‌حل مسأله‌های زیر هم هست.

مسألهٔ ۲. در صفحهٔ شطرنج، اسبی از خانهٔ $a1$ به راه می‌افتد و بعد از انجام چند حرکت به آنجا باز می‌گردد. ثابت کنید تعداد حرکتهای این اسب عددی زوج است.

مسألهٔ ۳. آیا ممکن است که اسبی از خانهٔ $a1$ صفحهٔ شطرنج به راه بیفتد و به خانهٔ $h8$ برود و در مسیرش در هر یک از خانه‌های دیگر درست یک بار بنشیند؟

راه‌حل. خیر، ممکن نیست. اسب در هر حرکت از خانه‌ای سفید به خانه‌ای سیاه می‌رود و یا برعکس. چون این اسب باید ۶۳ حرکت انجام دهد، با حرکت آخر (حرکت فرد) باید به خانه‌ای برود که رنگش با رنگ خانه‌ای که از آنجا به‌راه افتاده بود یکی نباشد؛ ولی خانه‌های $a1$ و $h8$ همرنگ‌اند.

مانند مسألهٔ ۳ در بسیاری از مسأله‌های این بخش باید ثابت کنیم که وجود برخی وضعیتها غیرممکن است. در واقع وقتی در سؤالی پرسیده می‌شود که آیا وجود وضعیتی ممکن است یا نه، پاسخمان در این بخش بدون استثناء «خیر» است. البته این امر برای دانش‌آموزانی که تجربهٔ ریاضیشان کم است قدری مشکل ایجاد می‌کند. نخستین عکس‌العملشان یا سرخوردگی از این است که نمی‌توانند وضعیت «درست» را (که در شرطهای غیرممکن موردنظر صدق می‌کند) پیدا کنند یا اعلام این مطلب است که وضعیت موردنظر غیرممکن است، بی‌آنکه درک روشنی از آنچه که برای اثبات این ادعا باید انجام داد داشته باشند. در اینجا مسأله‌ای ساده، مربوط به مسأله‌های «زوج و فرد» که بعداً در این بخش خواهید دید، می‌آوریم که این موضوع را روشن می‌کند:

آیا می‌توانید پنج عدد فرد پیدا کنید که مجموعشان ۱۰۰ شود؟

به‌دنبال حل این مسأله می‌توان بحثی را پیش کشید که از طریق آن دانش‌آموزان متوجه شوند که فقط ضعف شخصی خودشان نیست که نمی‌گذارد این مجموعه از عددها را پیدا کنند، بلکه تناقضی در طبیعت خود مجموعهٔ موردنظر وجود دارد که در این امر دخیل است. در این سطح، هم اثبات از طریق رسیدن به تناقض باعث سردرگمی دانش‌آموزان می‌شود و هم مفهوم اثبات غیرممکن بودن وجود

برخی وضعیتها. پرداختن به مسأله‌هایی دربارهٔ زوجیت راهی ساده و در عین حال مؤثر برای معرفی هردو این مفهومهاست.

مسألهٔ ۴. مسیری بسته از ۱۱ پاره‌خط تشکیل شده است. آیا ممکن است یک خط که از هیچ‌یک از رأسهای این مسیر نمی‌گذرد همهٔ پاره‌خطهایش را قطع کند؟

مسألهٔ ۵. سه دیسک هاکی روی یخ به‌نامهای A، B و C روی زمین بازی افتاده‌اند. بازیکنی به یکی از آنها طوری ضربه می‌زند که از میان دوتای دیگر بگذرد. او این کار را ۲۵ بار انجام می‌دهد. آیا با این کار می‌تواند این سه دیسک را به جاهای اولیه‌شان بازگرداند؟

مسألهٔ ۶. کاتیا و دوستانش دور دایره‌ای ایستاده‌اند. می‌دانیم هر دو بغل‌دستی هر یک از این بچه‌ها همجنس‌اند. اگر روی این دایره پنج پسر وجود داشته باشد، تعداد دخترها چندتاست؟

در اینجا اصلی دیگر را که در راه‌حل مسألهٔ قبلی آمده است خاطرنشان می‌کنیم: در زنجیرهٔ بسته‌ای که اشیا در آن یکی در میان قرارگرفته‌اند، تعداد اشیای یک نوع (پسرها) با تعداد اشیای نوع دیگر (دخترها) برابر است.

۲. افرازکردن به جفتها

مسألهٔ ۷. آیا می‌توان مسیری بسته از ۹ پاره‌خط طوری رسم کرد که هر یک از آنها درست یکی از پاره‌خطهای دیگر را قطع کند؟

راه‌حل. اگر رسم چنین مسیر بسته‌ای ممکن باشد، آن وقت همهٔ این پاره‌خطها را می‌شود به چند جفت پاره‌خط متقاطع افرازکرد. اما در این صورت تعداد پاره‌خطها باید عددی زوج باشد.

روی ایدهٔ اصلی این راه‌حل انگشت می‌گذاریم: اگر بتوان مجموعه‌ای از اشیا را به جفتهایی افراز کرد، آن‌وقت تعداد اشیای این مجموعه عددی زوج است. در اینجا چند مسألهٔ مشابه می‌آوریم:

مسألهٔ ۸. آیا می‌توان صفحهٔ شطرنجی ۵ × ۵ را با دومینوهای ۲ × ۱ پوشاند؟

مسألهٔ ۹. ۱۰۱ ضلعی محدبی که یک محور تقارن دارد داده شده است. ثابت کنید این محور تقارن از یکی از رأسهایش می‌گذرد. در مورد ۱۰ ضلعی‌ای که همین ویژگیها را دارد چه می‌توان گفت؟

مسأله‌های ۱۰ و ۱۱ دربارهٔ یک دست دومینو هستند که از مهره‌های مستطیلی‌شکل ۱ × ۲ (شامل دو خانهٔ مربع‌شکل برابر) تشکیل شده است و در هر یک از خانه‌های هر یک از آنها از ۰ تا ۶ خال وجود دارد. همهٔ ۲۸ جفت تعداد خالهای ممکن (شامل جفتها، مانند جفت یک، جفت دو و...) در

آنها وجود دارد. بازی دومینو این‌طور انجام می‌شود که بازیکنان نوبتی مهره‌ها را پشت سرهم می‌چینند تا زنجیره‌ای درست شود که در آن تعداد خالهای خانه‌های پهلوی هم دومینوهای مجاور با هم برابر است.

مسألهٔ ۱۰. همهٔ مهره‌های یک دست دومینو به شکل یک زنجیره چیده شده‌اند (به‌طوری که تعداد خالهای دو سر پهلوی هم دومینوهای مجاور یکی است). اگر یک سر این زنجیره عدد ۵ باشد عدد سر دیگرش چیست؟

مسألهٔ ۱۱. از یک دست دومینو همهٔ مهره‌هایی را که دست‌کم یک خانه‌شان هیچ خالی ندارد کنار می‌گذاریم. آیا بقیهٔ دومینوها را می‌توان طبق قواعد بازی به شکل یک زنجیره چید؟

مسألهٔ ۱۲. آیا می‌توان ۱۳ضلعی محدبی را به چند متوازی‌الاضلاع تقسیم کرد؟

مسألهٔ ۱۳. روی صفحهٔ شطرنجی ۲۵ × ۲۵ بیست و پنج سرباز را طوری قرار داده‌ایم که خانه‌هایی که اشغال کرده‌اند نسبت به قطری از صفحه متقارن‌اند. ثابت کنید دست‌کم یکی از این مهره‌ها روی این قطر قرار دارد.

راه‌حل. اگر هیچ مهره‌ای روی قطر موردنظر نباشد، آن‌وقت می‌توان مهره‌ها را به جفتهایی که نسبت به این قطر قرینه‌اند افرازکرد. بنابراین باید یکی (و در حقیقت تعدادی فرد) از مهره‌ها روی قطر موردنظر باشد.

در حل این مسأله، دانش‌آموزان اغلب در فهم این مطلب مشکل دارند که به‌جای فقط یک مهره ممکن است تعدادی فرد از مهره‌ها روی قطر موردنظر باشند. در مورد این مسأله، می‌توانیم حکممان را دربارهٔ افرازکردن به جفتها این‌طور صورتبندی کنیم: اگر از اشیای مجموعه‌ای که تعداد عضوهایش فرد است، تعدادی جفت تشکیل دهیم، دست‌کم یک شیء جفت نشده باقی می‌ماند.

مسألهٔ ۱۴. اکنون فرض کنید که در مسألهٔ ۱۳ خانه‌هایی که مهره‌ها اشغال کرده‌اند نسبت به هر دو قطر متقارن باشند. ثابت کنید که یکی از مهره‌ها در خانهٔ مرکزی صفحه قرار دارد.

مسألهٔ ۱۵. در هر خانهٔ جدولی ۱۵ × ۱۵ یکی از عددهای ۱، ۲، ۳،...، ۱۵ نوشته شده است. خانه‌هایی که نسبت به قطر اصلی قرینه‌اند، عددهایشان با هم برابرند و هیچ سطر یا ستونی شامل دو عدد برابر نیست. ثابت کنید روی قطر اصلی هیچ دو عددی با هم برابر نیستند.

۳. زوج و فرد

مسألهٔ ۱۶. آیا می‌توان اسکناسی ۲۵ روبلی را به ده اسکناس ۱، ۳ یا ۵ روبلی خرد کرد؟

راه‌حل. خیر، این کار ممکن نیست. این نتیجه‌گیری براساس مطلبی ساده است: مجموع تعدادی زوج عدد فرد، عددی زوج است. این مطلب را می‌توان این‌طور تعمیم داد: زوجیت مجموع چند عدد فقط

به زوجیت تعداد جمعوندهای فردش بستگی دارد. اگر تعداد جمعوندهای فرد، عددی فرد (زوج) باشد، آن‌وقت مجموع موردنظر هم عددی فرد (زوج) است.

مسألهٔ ۱۷. پیت دفتری ۹۶ برگی خرید و صفحاتش را از ۱ تا ۱۹۲ شماره‌گذاری کرد. ویکتور ۲۵ برگ از دفتر پیت را کند و ۵۰ شماره‌ای را که روی این برگها بود با هم جمع کرد. آیا ممکن است که این مجموع برابر با ۱۹۹۰ باشد؟

مسألهٔ ۱۸. حاصل‌ضرب ۲۲ عدد صحیح برابر با ۱ است. ثابت کنید مجموع این عددها صفر نیست.

مسألهٔ ۱۹. آیا می‌توان با نخستین ۳۶ عدد اول «مربعی جادویی» تشکیل داد؟

در اینجا منظور از «مربعی جادویی» آرایه‌ای ۶ × ۶ از خانه‌هاست که در هر خانه یک عدد وجود دارد و مجموع عددهای هر سطر، هر ستون و هر قطر مقداری ثابت است.

مسألهٔ ۲۰. عددهای ۱ تا ۱۰ در یک سطر نوشته شده‌اند. آیا می‌توان میان آنها طوری علامتهای «+» و «−» گذاشت که مقدار عبارت حاصل ۰ شود؟

توجه داشته باشید که عددهای منفی هم می‌توانند فرد یا زوج باشند.

مسألهٔ ۲۱. ملخی در امتداد خطی راست می‌جهد. با نخستین پرشش ۱ سانتیمتر حرکت می‌کند، با دومین پرش ۲ سانتیمتر و همین‌طور تا آخر. در هر جهش می‌تواند به جلو یا به عقب برود. ثابت کنید بعد از ۱۹۸۵ جهش، این ملخ ممکن نیست به نقطه‌ای که از آنجا به‌راه افتاده بود بازگردد.

مسألهٔ ۲۲. عددهای ۱، ۲، ۳، . . .، ۱۹۸۴ و ۱۹۸۵ روی تخته‌سیاه نوشته شده‌اند. همین‌طوری تصمیم می‌گیریم که دو عدد دلخواه را پاک کنیم و به‌جای آنها تفاضل مثبتشان را بنویسیم. بعد از اینکه این کار را چند بار انجام دادیم فقط یک عدد روی تخته باقی می‌ماند. آیا ممکن است این عدد ۰ باشد؟

۴. مسأله‌های گوناگون

در این بخش تعدادی مسألهٔ دشوارتر آورده‌ایم. در راه‌حل آنها علاوه بر ایدهٔ زوجیت از مطالب دیگر هم استفاده می‌شود.

مسألهٔ ۲۳. آیا می‌توان صفحهٔ شطرنج ۸ × ۸ معمولی را با دومینوهای ۲ × ۱ طوری پوشاند که فقط خانه‌های a۱ و h۸ پوشانده نشده باقی بمانند؟

مسألهٔ ۲۴. عدد ۱۷ رقمی دلخواهی را انتخاب می‌کنیم و رقمهایش را به‌ترتیب عکس می‌نویسیم تا عددی جدید به‌دست آید. این دو عدد را با هم جمع می‌کنیم. ثابت کنید مجموعشان شامل دست‌کم یک رقم زوج است.

مسألهٔ ۲۵. در گروهی نظامی ۱۰۰ سرباز وجود دارند که هر شب سه‌تایشان مأموریت‌اند. آیا ممکن است که بعد از مدتی هر یک از سربازها با هر سرباز دیگر درست یک بار، با هم مأموریت بوده باشند؟

مسألهٔ ۲۶. چهل و پنج نقطه روی امتداد پاره‌خط AB، و بیرون آن انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید مجموع فاصله‌های این نقطه‌ها از نقطهٔ A با مجموع فاصله‌هایشان از نقطهٔ B برابر نیست.

مسألهٔ ۲۷. نُه عدد روی دایره‌ای می‌گذاریم: چهار تا ۱ و پنج تا ۰. روی این عددها این عمل را انجام می‌دهیم: میان هر جفت عدد مجاور چنانچه برابر نباشند یک ۰ و اگر یکی باشند یک ۱ می‌گذاریم و بعد عددهای «قبلی» را پاک می‌کنیم. آیا ممکن است بعد از چندبار انجام این عمل همهٔ عددهای باقی‌مانده برابر شوند؟

مسألهٔ ۲۸. بیست‌وپنج دانش‌آموز و بیست‌وپنج معلم دور میزی گرد نشسته‌اند. ثابت کنید هر دو بغل‌دستی دست‌کم یکی از این افراد، دانش‌آموزند.

مسألهٔ ۲۹. حلزونی روی سطحی صاف با سرعت ثابت می‌خزد و هر ۱۵ دقیقه به‌اندازهٔ یک زاویهٔ قائمه می‌چرخد. ثابت کنید که این حلزون فقط بعد از گذشت چند ساعت کامل می‌تواند به نقطهٔ آغاز حرکتش بازگردد.

مسألهٔ ۳۰. سه ملخ در امتداد خطی راست جفتک‌چارکش بازی می‌کنند. در هر نوبت یکی از ملخها فقط از روی یک ملخ دیگر می‌پرد. آیا ممکن است که این ملخها بعد از ۱۹۹۱ پرش به وضعیت اولیه‌شان بازگردند؟ (شکل ۷ را ببینید.)



شکل ۷

مسألهٔ ۳۱. از ۱۰۱ سکه ۵۰تایشان تقلبی‌اند و اختلاف وزن هر سکهٔ تقلبی با سکهٔ اصل ۱ گرم است. پیتر وسیلهٔ اندازه‌گیریی به‌شکل ترازو دارد که اختلاف وزن میان اشیایی را که در کفه‌هایش گذاشته می‌شوند نشان می‌دهد. او یک سکه انتخاب می‌کند و می‌خواهد با یک بار وزن کردن بفهمد که تقلبی است یا نه. آیا می‌تواند این کار را انجام دهد؟

مسألهٔ ۳۲. آیا می‌توان عددهای از ۱ تا ۹ را پشت سرهم طوری چید که تعداد عددهای میان ۱ و ۲، میان ۲ و ۳، . . .، و میان ۸ و ۹ عددی فرد باشد؟

فصل ۲

ترکیبیات ـ ۱

به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B رفت؟ زبان کیمیاگری چند کلمه دارد؟ چند عدد شش رقمی «خوش یُمن» وجود دارد؟ چند . . .؟ اینها و بسیاری پرسشهای مشابه دیگر را در این فصل بررسی می‌کنیم.

ابتدا چند مسألهٔ ساده می‌آوریم.

مسألهٔ ۱. پنج فنجان مختلف و سه نعلبکی متفاوت در فروشگاه «مهمانی عصرانه» وجود دارد. به چند طریق می‌توان یک فنجان و یک نعلبکی خرید؟

راه‌حل. ابتدا یک فنجان انتخاب می‌کنیم. بعد برای کامل کردن این سرویس می‌توانیم هر یک از سه نعلبکی را انتخاب کنیم. بنابراین ۳ سرویس فنجان و نعلبکی متمایز، شامل فنجان انتخاب شده، وجود دارد. چون پنج فنجان داریم، ۱۵ سرویس متمایز وجود دارد ($۳ \times ۵ = ۱۵$).

مسألهٔ ۲. در فروشگاه «مهمانی عصرانه» چهار قاشق چایخوری مختلف هم وجود دارد. به چند طریق می‌توان یک سرویس چایخوری شامل یک فنجان، یک نعلبکی و یک قاشق خرید؟

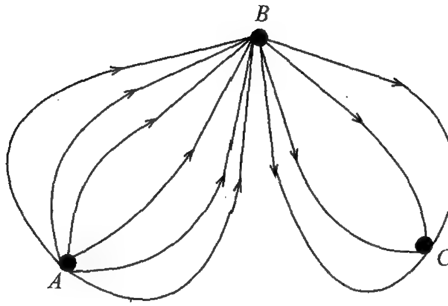
راه‌حل. یکی از ۱۵ سرویس فنجان و نعلبکی مسألهٔ قبل را در نظر بگیرید. به چهار طریق مختلف می‌توان یک قاشق انتخاب کرد و این سرویس را کامل کرد. بنابراین تعداد همهٔ سرویسهای ممکن برابر با ۶۰ است (چون $۴ \times ۳ \times ۵ = ۴ \times ۱۵ = ۶۰$).

درست به‌همین طریق می‌توانیم مسألهٔ زیر را حل کنیم.

مسألهٔ ۳. A، B و C سه شهر سرزمین عجایب‌اند. از A به B شش راه وجود دارد و از B به C چهار راه (شکل ۸ را ببینید). به چند طریق می‌توان از A به C رفت؟

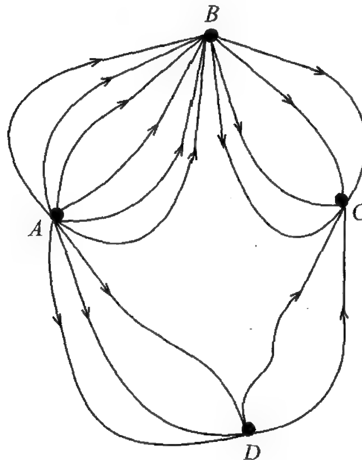
پاسخ: ۴×۶ یا ۲۴ طریق.

در راه‌حل مسألهٔ ۴ از ایده‌ای جدید استفاده می‌کنیم.



شکل ۸

مسألهٔ ۴. اخیراً در سرزمین عجایب شهری به‌نام D ساخته شده است و چند راه جدید احداث شده‌اند (شکل ۹ را ببینید). اکنون به چند طریق می‌توان از A به C رفت؟



شکل ۹

راه‌حل. دو حالت در نظر می‌گیریم: مسیرمان از B بگذرد یا از D. در هر حالت محاسبهٔ تعداد مسیرها بسیار آسان است؛ اگر از B برویم، آن‌وقت برای رفتن از A به C، ۲۴ راه وجود دارد. در حالت دیگر ۶ راه وجود دارد. برای به‌دست آوردن پاسخ مسأله باید این دو عدد را با هم جمع کنیم. بنابراین از ۳۰ مسیر می‌توانیم از A به C برویم.

تقسیم کردن مسأله به‌چند حالت ایدهٔ بسیار مفیدی است. این ایده در حل کردن مسألهٔ ۵ هم به‌درد می‌خورد.

مسألهٔ ۵. پنج فنجان، سه نعلبکی و چهار قاشق چایخوری، همگی متمایز، در فروشگاه «مهمانی عصرانه» وجود دارد. به چند طریق می‌توان از میان این لوازم دو قلم کالا با نامهای متفاوت خرید؟

راه‌حل. سه حالت ممکن است پیش آید: یک فنجان و یک نعلبکی بخریم، یا یک فنجان و یک قاشق و یا یک نعلبکی و یک قاشق. محاسبهٔ تعداد راههایی که در هر یک از این حالتها ممکن است پیش آید چندان دشوار نیست: به‌ترتیب ۱۵، ۲۰ و ۱۲ راه. با جمع کردن این عددها پاسخ مسأله را به‌دست می‌آوریم: به ۴۷ طریق.

توصیه به معلمان. هدف اصلی که معلمان باید هنگام بحث دربارهٔ این مسأله‌ها دنبال کنند ایجاد این قابلیت در دانش‌آموزان است که بفهمند چه وقت تعداد راهها را باید با هم جمع کنند و چه وقت باید آنها را در هم ضرب کنند. البته به این منظور باید تعداد زیادی مسأله برای دانش‌آموزان مطرح کرد (در این‌باره چند مسأله در آخر این فصل آورده‌ایم (مسأله‌های ۲۸ تا ۳۲) و خود معلم هم می‌تواند چند مسأله طرح کند). از جمله موضوعات مناسب برای این مسأله‌ها خرید اشیا، نقشه‌های رفت و آمد، آرایش اشیا و موضوعاتی از این قبیل‌اند.

مسألهٔ ۶. عددی طبیعی را در صورتی «فردنما» می‌نامیم که همهٔ رقمهایش فرد باشند. چند عدد چهاررقمی فردنما وجود دارد؟

راه‌حل. روشن است که ۵ تا عدد یک‌رقمی فردنما وجود دارد. می‌توان به پنج طریق رقم فرد دیگری را به سمت راست هر یک از عددهای یک رقمی فردنما اضافه کرد. بنابراین ۵ × ۵ یا ۲۵ عدد دورقمی فردنما داریم. به‌همین ترتیب ۵ × ۵ × ۵ یا ۱۲۵ عدد سه‌رقمی فردنما و ۵ × ۵ × ۵ × ۵ یا $۵^۴$ یعنی ۶۲۵ عدد چهاررقمی فردنما به‌دست می‌آوریم.

توصیه به معلمان. در مسألهٔ آخر پاسخ به شکل m^n است. معمولاً پاسخی از این دست برای مسأله‌هایی به‌دست می‌آید که می‌توانیم عضوهای مجموعه‌ای m عضوی را در هر یک از n مکان داده شده قرار دهیم. در چنین مسأله‌هایی دانش‌آموزان ممکن است در تشخیص دو عدد m و n با مشکل مواجه شوند و در نتیجه پایه و نما را با هم اشتباه کنند.

در اینجا چهار مسألهٔ مشابه دیگر آورده‌ایم.

مسألهٔ ۷. سکه‌ای را سه‌بار پرتاب می‌کنیم. با این کار چند دنبالهٔ شیر و خط متفاوت می‌توان به‌دست آورد؟
پاسخ: $۲^۳$.

مسألهٔ ۸. هر خانهٔ جدولی ۲ × ۲ را می‌توان با یکی از دو رنگ سیاه یا سفید رنگ کرد. چند رنگ‌آمیزی متفاوت از این جدول وجود دارد؟
پاسخ: $۲^۴$.

مسألهٔ ۹. به چند طریق می‌توان یک جدول ویژهٔ شرط‌بندی ورزشی را پر کرد؟ در این شرط‌بندی باید نتایج ۱۳ مسابقهٔ هاکی روی یخ را پیش‌بینی کنید، این‌طور که یا پیروزی یکی از دو تیم را نشان دهید یا یک نتیجهٔ تساوی را.

پاسخ: $۳^{۱۳}$.

مسألهٔ ۱۰. الفبای کیمیاگری فقط از سه حرف تشکیل شده است: A، B و C. هر کلمهٔ این زبان دنباله‌ای دلخواه از حداکثر چهار حرف است. زبان کیمیاگری چند کلمه دارد؟

راهنمایی: تعداد کلمه‌های یک‌حرفی، دوحرفی، سه‌حرفی و چهارحرفی را جداجدا حساب کنید.

پاسخ: $۳^{۴} + ۳^{۳} + ۳^{۲} + ۳$ یا ۱۲۰.

با مجموعه‌ای دیگر از مسأله‌ها به بحثمان ادامه می‌دهیم.

مسألهٔ ۱۱. در تیم فوتبالی ۱۱ نفره باید یک نفر کاپیتان و یک نفر جانشین کاپیتان انتخاب کرد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

راه‌حل. هریک از ۱۱ بازیکن را می‌توان به‌عنوان کاپیتان انتخاب کرد. بعد از آن، هریک از ۱۰ بازیکن باقی‌مانده را می‌توان برای جانشینی کاپیتان انتخاب کرد. بنابراین ۱۰×۱۱ یا ۱۱۰ انتخاب متفاوت وجود دارد.

این مسأله با مسأله‌های قبلی در این نکته تفاوت دارد که انتخاب کاپیتان بر مجموعهٔ داوطلبان مقام جانشینی کاپیتان اثر می‌گذارد، زیرا کاپیتان نمی‌تواند جانشین خودش هم باشد. بنابراین، انتخابهای کاپیتان و جانشینش از هم مستقل نیستند (آن‌طورکه، مثلاً، انتخابهای یک فنجان و یک نعلبکی در مسألهٔ ۱ مستقل بودند).

در زیر، چهار مسألهٔ دیگر از همین نوع آورده‌ایم.

مسألهٔ ۱۲. به چند طریق می‌توان با سه تکهٔ باریک و هم‌عرض پارچه، پرچمی سه‌رنگ دوخت که در آن سه تکه افقی باشند، در صورتی که طاقه‌هایی از شش رنگ پارچه داشته باشیم؟ توجه کنید که میان بالای پرچم و پایینش تمایز قائل می‌شویم.

راه‌حل. می‌توانیم رنگ پارچهٔ تکهٔ پایینی را به شش طریق انتخاب کنیم. بعد از آن، در تکهٔ وسطی فقط می‌توانیم از پنج رنگ پارچه استفاده کنیم و در این صورت فقط چهار رنگ پارچه برای تکهٔ بالایی می‌ماند. در نتیجه، این پرچم را می‌توان به $۴ \times ۵ \times ۶$ یا ۱۲۰ راه مختلف دوخت.

مسألهٔ ۱۳. به چند طریق می‌توان یک رخ سفید و یک رخ سیاه را روی صفحهٔ شطرنجی طوری گذاشت که یکدیگر را تهدید نکنند؟

راه‌حل. رخ سفید را می‌توان در هر یک از ۶۴ خانهٔ صفحهٔ شطرنج گذاشت. صرف‌نظر از اینکه این مهره

کجا باشد، دقیقاً ۱۵ خانه را (از جمله خانه‌ای که در آن قرار دارد) تهدید می‌کند. در نتیجه، ۴۹ خانه می‌ماند که رخ سیاه را می‌توان در هر یک از آنها قرار داد. بنابراین برای چیدن این رخها ۴۹ × ۶۴ یا ۳۱۳۶ راه مختلف وجود دارد.

مسألهٔ ۱۴. به چند طریق می‌توان یک شاه سفید و یک شاه سیاه را روی صفحهٔ شطرنج طوری گذاشت که یکدیگر را تهدید نکنند؟

راه‌حل. شاه سفید را می‌توان در هر یک از ۶۴ خانهٔ صفحهٔ شطرنج گذاشت. در هر صورت، تعداد خانه‌هایی که این مهره آنها را تهدید می‌کند به مکانش بستگی دارد. بنابراین سه حالت در نظر می‌گیریم:

الف) اگر شاه سفید در یکی از گوشه‌های صفحه باشد، آن‌وقت ۴ خانه را (از جمله خانه‌ای که در آن قرار دارد) تهدید می‌کند. بنابراین ۶۰ خانه می‌ماند که شاه سیاه را می‌توان در هر یک از آنها قرار داد.

ب) اگر شاه سفید جایی روی کنارهٔ صفحهٔ شطرنج، بجز گوشه‌ها، باشد (۲۴ خانه از این دست وجود دارد)، آن‌وقت ۶ خانه را تهدید می‌کند و ۵۸ خانه وجود دارد که می‌توان شاه سیاه را در آنها گذاشت.

ج) اگر شاه سفید روی کنارهٔ صفحهٔ شطرنج نباشد (۳۶ خانه از این دست وجود دارد)، آن‌وقت ۹ خانه را تهدید می‌کند و فقط ۵۵ خانه برای گذاشتن شاه سیاه باقی می‌ماند.

بنابراین، به ۵۵ × ۳۶ + ۵۸ × ۲۴ + ۶۰ × ۴ یا ۳۶۱۲ راه می‌توان هر دو شاه را طوری روی صفحهٔ شطرنج گذاشت که یکدیگر را تهدید نکنند.

* * *

اکنون می‌خواهیم تعداد راههای چیدن n شیء را در یک ردیف حساب کنیم. آرایشهایی از این دست را جایگشت می‌نامند، که نقشی مهم در ترکیبیات و جبر دارند. اما پیش از این کار باید کمی از موضوع خارج شویم.

اگر n عددی طبیعی باشد، آن وقت $n!$ (بخوانید n فاکتوریل) حاصل‌ضرب $۱\times۲\times۳\times\ldots\times n$ است. بنابراین $۲ = !۲$، $۶ = !۳$، $۲۴ = !۴$ و $۱۲۰ = !۵$. برای آسانتر شدن محاسبات و سازگاری $!۰$ برابر با ۱ تعریف می‌شود.

یادداشت. پیش ازکارکردن با جایگشتها دانش‌آموز باید تعریف فاکتوریل را بداند و بیاموزد که چطور با این تابع کارکند. تمرینهای زیر ممکن است برای این منظور مفید باشند.

تمرین ۱. این عبارتها را ساده کنید: الف) $۱۱ \times !۱۰$؛ ب) $(n+۱)n!$.

تمرین ۲. الف) مقدار $\frac{۱۰۰!}{۹۸!}$ را حساب کنید؛ ب) عبارت $\frac{n!}{(n-۱)!}$ را ساده کنید.

تمرین ۳. ثابت کنید اگر p عددی اول باشد، آن‌وقت $(p-۱)!$ بر p بخش‌پذیر نیست.

اکنون جایگشتها را بررسی می‌کنیم.

مسألهٔ ۱۵. با استفاده از رقمهای ۱، ۲ و ۳ چند عدد سه‌رقمی (بدون تکرار رقمها) می‌توان نوشت؟

راه‌حل. درست عین راه‌حل مسألهٔ ۱۲ استدلال می‌کنیم. نخستین رقم را می‌توان هر یک از سه عدد داده شده انتخاب کرد، دومی را هم می‌توان هر یک از دو عدد باقی‌مانده انتخاب کرد و سومی هم باید عددی که مانده است باشد. بنابراین $۱ \times ۲ \times ۳$ یا $۳!$ عدد به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۱۶. به چند طریق می‌توان چهار توپ به رنگهای قرمز، سیاه، آبی و سبز را در یک ردیف چید؟

راه‌حل. نخستین مکان ردیف را می‌توان با هر یک از توپهای داده شده پر کرد. دومین مکان را می‌توان با هر یک از سه توپ باقی‌مانده پر کرد و همین‌طور تا آخر. در نهایت پاسخ مسأله به‌دست می‌آید (شبیه پاسخ مسألهٔ ۱۵): $۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴$ یا $۴!$ طریق.

به‌همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که n شیء متمایز را می‌توان به

$$n \times (n-۱) \times (n-۲) \times \cdots \times ۲ \times ۱$$

طریق در یک ردیف چید؛ یعنی،

تعداد جایگشتهای n شیء برابر با $n!$ است.

به‌منظور سهولت در نمادگذاری این‌طور قرار می‌گذاریم: هر دنبالهٔ متناهی از حروف انگلیسی را «کلمه» می‌نامیم (صرف‌نظر از اینکه بتوان آن را در فرهنگها پیدا کرد یا نه). مثلاً می‌توانیم از هر یک از حروف A، B و C درست یک بار استفاده کنیم و شش کلمه بسازیم: ABC، ACB، BAC، BCA، CAB و CBA. در پنج مسألهٔ زیر باید تعداد کلمه‌های مختلفی را که می‌توان با جابه‌جایی حروف کلمهٔ داده شده به‌دست آورد حساب کنید.

مسألهٔ ۱۷. «VECTOR».

راه‌حل. چون همهٔ حروف این کلمه متمایزند، پس پاسخ مسأله $۶!$ است.

مسألهٔ ۱۸. «TRUST».

راه‌حل. این کلمه شامل دو حرف T است و حروف دیگر همگی متمایزند. به‌طور موقت، حروف T را به‌صورت دو حرف متمایز $T_۱$ و $T_۲$ تصور می‌کنیم. با این فرض $۵!$ یا ۱۲۰ کلمهٔ متمایز وجود دارد. البته هر دو کلمه‌ای که می‌توان آنها را فقط با جابه‌جا کردن حروف $T_۱$ و $T_۲$ از یکدیگر به‌دست آورد،

در حقیقت یکی هستند. در نتیجه ۱۲۰ کلمه‌ای که گفتیم به جفت کلمه‌هایی عین هم تقسیم می‌شوند. یعنی پاسخ مسأله $\frac{۱۲۰}{۲}$ یا ۶۰ است.

مسألهٔ ۱۹. «CARAVAN».

راه‌حل. اگر در این کلمه سه حرف A را به‌صورت حروف متمایز $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ تصور کنیم، !۸ کلمهٔ متمایز به‌دست می‌آوریم. البته، همهٔ کلمه‌هایی که می‌توان آنها را فقط با جابه‌جا کردن حروف A_i از یکدیگر به‌دست آورد یکی هستند. چون حروف A_i را می‌توان در مکانهایشان به !۳ یا ۶ طریق با هم جابه‌جا کرد، همهٔ !۸ کلمه‌ای که گفتیم به گروههایی از !۳ کلمهٔ عین هم تقسیم می‌شوند. بنابراین پاسخ مسأله $\frac{!۸}{!۳}$ است.

مسألهٔ ۲۰. «CLOSENESS».

راه‌حل. سه حرف S و دو حرف E در این کلمه وجود دارد. اگر به‌طور موقت همهٔ آنها را به‌صورت حروف متمایز تصور کنیم، !۹ کلمه به‌دست می‌آوریم. چون حروف E یکی هستند، تعداد کلمه‌های متمایز به $\frac{!۹}{!۲}$ کاهش می‌یابد. بعد، وقتی این را هم در نظر بگیریم که حروف S هم یکی هستند، پاسخ نهایی به‌دست می‌آید: $\frac{!۹}{!۲!۳}$.

مسألهٔ ۲۱. «MATHEMATICAL».

پاسخ: $\frac{!۱۲}{!۳!۲!۲}$.

در این مجموعه از مسأله‌ها دربارهٔ کلمه‌ها، روشی بسیار جالب و مهم، یعنی ایدهٔ شمارش چند برابر، شرح داده شده است. در این روش به‌جای شمارش تعداد اشیایی که موردنظرمان است، بعضی وقتها آسانتر است که اشیایی دیگر را بشماریم که تعدادشان مضربی از تعداد اشیای اصلی است.

در اینجا چهار مسألهٔ دیگر را که در حلشان از این روش استفاده می‌شود آورده‌ایم.

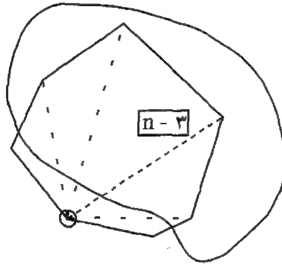
مسألهٔ ۲۲. کشوری ۲۰ شهر دارد که میان هر دو تا از آنها خطی هوایی دایر است. چند خط هوایی در این کشور وجود دارد؟

راه‌حل. هر خط هوایی میان دو شهر برقرار است. می‌توانیم هر یک از ۲۰ شهر این کشور (مثلاً شهر A) را به‌عنوان مبدأ خطی هوایی انتخاب کنیم و آن‌وقت ۱۹ شهر باقی می‌ماند که می‌توانیم مقصد خطی هوایی را از میانشان (مثلاً شهر B) انتخاب کنیم. با ضرب کردن این دو عدد به‌دست می‌آید $۳۸۰ = ۱۹ \times ۲۰$. البته، در این محاسبه هر خط هوایی مانند AB دو بار شمرده شده است: یک بار وقتی که A به‌عنوان مبدأ خط انتخاب می‌شود و یک بار هم وقتی که B به‌عنوان مبدأ انتخاب می‌شود. بنابراین، تعداد خطوط هوایی برابر با $\frac{۳۸۰}{۲}$ یا ۱۹۰ است.

مسأله‌ای مشابه این مسأله در فصل «گرافها ـ ۱» می‌آید، که در آنجا تعداد یالهای گراف را می‌شماریم.

مسألهٔ ۲۳. nضلعی محدب چند قطر دارد؟

راه‌حل. هر یک از n رأس را می‌توان به‌عنوان یک سر قطر انتخاب کرد و در این صورت برای انتخاب سر دیگرش $n - ۳$ رأس وجود دارد (هر یک از رأسها، بجز رأس انتخاب شده و دو رأس مجاورش). اگر قطرها را این‌طور بشماریم، هر قطر دقیقاً دو بار شمرده می‌شود. بنابراین پاسخ مسألهٔ $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است. (شکل ۱۰ را ببینید.)

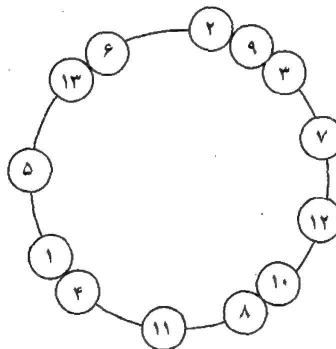


شکل ۱۰

مسألهٔ ۲۴. هر نخ یا زنجیر بسته همراه با چند مهره را که نخ یا زنجیر از درونشان گذشته است «گردنبند» می‌نامیم. می‌توانیم گردنبند را بچرخانیم اما نمی‌توانیم آن‌را برگردانیم. با ۱۳ مهرهٔ مختلف چند گردنبند متمایز می‌توان ساخت؟

راه‌حل. ابتدا فرض می‌کنیم که چرخاندن گردنبند مجاز نباشد. در این صورت روشن است که !۱۳ گردنبند مختلف وجود دارد. البته، هر آرایش از مهره‌ها را با ۱۲ آرایشی که می‌توان آنها را از این یکی با چرخاندن گردنبند به‌دست آورد باید یکی دانست. (شکل ۱۱ را ببینید.)

پاسخ: $\frac{۱۳!}{۱۳}$ یا !۱۲.



شکل ۱۱

مسألهٔ ۲۵. اکنون فرض کنید که برگرداندن گردنبند هم مجاز باشد. در این صورت با استفاده از ۱۳ مهرهٔ مختلف چند گردنبند می‌توان ساخت؟

راه‌حل. با مجاز دانستن برگرداندن گردنبند تعداد گردنبندها در مسألهٔ قبلی نصف می‌شود.
پاسخ: $\frac{۱۲!}{۲}$.

در مسألهٔ زیر ایدهٔ ترکیبیاتی مهم دیگری توضیح داده شده است.

مسألهٔ ۲۶. چند عدد شش رقمی دست‌کم یک رقم زوج دارند؟

راه‌حل. به‌جای شمارش عددهایی که دست‌کم یک رقمشان زوج است، تعداد عددهایی شش‌رقمی را پیدا می‌کنیم که این ویژگی را ندارند. چون اینها درست عددهایی‌اند که همهٔ رقمهایشان فردند، تعدادشان برابر با $۵^۶$ یعنی ۱۵۶۲۵ است (مسألهٔ ۶ را ببینید). چون در کل ۹۰۰۰۰۰ عدد شش‌رقمی وجود دارد، پس تعداد عددهای شش‌رقمی که دست‌کم یک رقمشان زوج است برابر با ۱۵۶۲۵ − ۹۰۰۰۰۰ یا ۸۸۴۳۷۵ است.

ایدهٔ اصلی در این راه‌حل استفاده از روش متمم‌گیری است؛ یعنی شمارش (یا در نظر گرفتن) اشیای «نامطلوب» به‌جای اشیای «مطلوب». در اینجا مسألهٔ دیگری را آورده‌ایم که آن‌را هم می‌توان با استفاده از این روش حل کرد.

مسألهٔ ۲۷. الفبای زبان کیمیاگری شش حرف دارد. در این زبان هر کلمه دنباله‌ای دلخواه از شش حرف است که دست‌کم دوتایشان عین هم‌اند. زبان کیمیاگری چند کلمه دارد؟
پاسخ: $۶^۶ - ۶!$.

توصیه به معلمان. در پایان مایلیم خاطرنشان کنیم که بسیار مناسب است که به هر یک از ایده‌های مربوط به هر سری از مسائل این فصل (و شاید به موضوعات دیگری فراتر از ترکیبیات) جلسه‌ای جداگانه اختصاص دهید. از این گذشته، توصیه می‌کنیم مطالبی را که تاکنون در جلسه‌های قبلی تدریس شده است مرور کنید. به همین دلیل، در اینجا تعدادی مسأله برای فعالیت مستقل دانش‌آموزان و به‌عنوان تکلیف آورده‌ایم.

مسأله‌هایی برای فعالیت مستقل دانش‌آموزان

مسألهٔ ۲۸. در یک دفتر پستی پنج نوع پاکت نامه و چهار نوع تمبر وجود دارد. به چند طریق می‌توان از این دفتر پستی یک پاکت نامه و یک تمبر خرید؟

مسألهٔ ۲۹. به چند طریق می‌توان یک حرف صدادار و یک حرف بی‌صدا از میان حروف کلمهٔ «RINGER» انتخاب کرد؟

مسألهٔ ۳۰. هفت اسم، پنج فعل و دو صفت روی تخته‌سیاه نوشته شده‌اند. با انتخاب یک کلمه از هر نوع می‌توانیم جمله‌ای بسازیم و برایمان مهم نیست که این جمله معنی دارد یا نه. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

مسألهٔ ۳۱. هریک از دو کلکسیونر تازه‌کاری ۲۰ تمبر و ۱۰ کارت‌پستال دارد. معاوضه را در صورتی منصفانه می‌نامیم که این دو، یک تمبر را در ازای یک تمبر یا یک کارت‌پستال را در ازای یک کارت‌پستال با هم معاوضه کنند. به چند طریق می‌توان معاوضه‌ای منصفانه میان این دو کلکسیونر ترتیب داد؟

مسألهٔ ۳۲. در چند عدد شش‌رقمی زوجیت همهٔ رقمها یکسان است (یعنی همهٔ رقمها فردند یا زوج)؟

مسألهٔ ۳۳. به چند طریق می‌توانیم شش نامهٔ فوری را ارسال کنیم، به‌شرطی که سه نفر پیک در اختیار داشته باشیم و هر نامه را بتوان به هر یک از آنها سپرد؟

مسألهٔ ۳۴. یک دستهٔ ۵۲تایی از کارتهایی به چهار رنگ قرمز، سبز، زرد و آبی داریم که در آن از هر رنگ ۱۳ کارت به شماره‌های از ۱ تا ۱۳ وجود دارد. به چند طریق می‌توانیم چهارکارت انتخاب کنیم که هم رنگهایشان با هم فرق داشته باشد و هم شماره‌هایشان.

مسألهٔ ۳۵. روی طاقچه‌ای پنج کتاب وجود دارد. به چند طریق می‌توان تعدادی از آنها (یا همه‌شان) را در قفسه‌ای چید؟ توجه کنید که حتی می‌توان در این قفسه فقط یک کتاب گذاشت.

مسألهٔ ۳۶. به چند طریق می‌توان هشت رخ را روی صفحهٔ شطرنج طوری گذاشت که یکدیگر را تهدید نکنند؟

مسألهٔ ۳۷. در یک کلاس N نفر راست‌دست‌اند و N نفر چپ‌دست. به چند طریق می‌توان آنها را برای انجام کار گروهی به زوجهای راست‌دست و چپ‌دست تقسیم کرد؟

مسألهٔ ۳۸. طبق قواعد یک دوره مسابقات شطرنج هر یک از شرکت‌کنندگان باید با هر شرکت‌کنندهٔ دیگر دقیقاً یک بار بازی کند. اگر ۱۸ نفر در این مسابقات شرکت کنند، چند مسابقه برگزار می‌شود؟

مسألهٔ ۳۹. به چند طریق می‌توان

الف) دو فیل؛

ب) دو اسب؛

ج) دو وزیر،

را روی صفحهٔ شطرنج طوری گذاشت که یکدیگر را تهدید نکنند؟

مسألهٔ ۴۰. مادری دو تا سیب، سه تا گلابی و چهار تا پرتقال دارد. به مدت نه روز، هر روز صبح به‌هنگام صبحانه به پسرش یک‌جور میوه می‌دهد. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

مسألهٔ ۴۱. خوابگاهی سه اتاق خالی دارد: یک اتاق یک‌نفره، یک اتاق دونفره و یک اتاق چهارنفره. به چند طریق می‌توان هفت دانشجو را در این اتاقها جای داد؟

مسألهٔ ۴۲. به چند طریق می‌توان یک دست مهرهٔ شطرنج را روی نخستین سطر صفحهٔ شطرنج چید؟ این دست از مهره‌ها از یک شاه، یک وزیر، دو رخ عین هم، دو اسب عین هم و دو فیل عین هم تشکیل شده است.

مسألهٔ ۴۳. با استفاده از دقیقاً پنج حرف A و حداکثر سه حرف B (و بدون هیچ حرف دیگری) چند «کلمه» می‌توان نوشت؟

مسألهٔ ۴۴. در چند عدد ده‌رقمی دست‌کم دو رقم برابرند؟

مسألهٔ ۴۵ *. آیا عددهایی هفت‌رقمی که در نمایش اعشاریشان رقم ۱ اصلاً وجود ندارد، بیش از ۵۰٪ کل عددهای هفت‌رقمی را تشکیل می‌دهند؟

مسألهٔ ۴۶. تاسی را سه بار پرتاب می‌کنیم. در چند تا از همهٔ برآمدهای ممکن دست‌کم یک بار شش آمده است؟

مسألهٔ ۴۷. به چند طریق می‌توان ۱۴ نفر را به هفت گروه دونفره تقسیم کرد؟

مسألهٔ ۴۸ *. در چند عدد نه‌رقمی مجموع رقمها عددی زوج است؟

فصل ۳

بخش‌پذیری و باقی‌مانده‌ها

توصیه به معلمان. این مبحث به‌اندازهٔ برخی مباحث دیگر جنبهٔ تفریحی و سرگرم‌کنندگی ندارد، در عوض شامل مقدار زیادی مطالب نظری مهم است. سعی کنید اصول کار را در جلسات کلاستان معرفی کنید. حتی مسأله‌های بسیار معمولی مانند تجزیه عددهای صحیح را می‌توان با پرسش اینکه «چه کسی می‌تواند این عدد بسیار بزرگ را پیش از بقیه تجزیه کند؟» یا «چه کسی می‌تواند بزرگترین مقسوم‌علیه اول این عدد را پیش از بقیه پیدا کند؟» به چالشی جدی مبدل کرد. بنابراین جلساتی را که به این مبحث اختصاص می‌یابند باید نسبت به سایر جلسات با دقتی بیشتر برگزار کرد. چون بخش‌پذیری در برنامهٔ آموزشی مدارس هم آمده است، می‌توانید از آموخته‌های خود دانش‌آموزان هم در این مورد استفاده کنید.

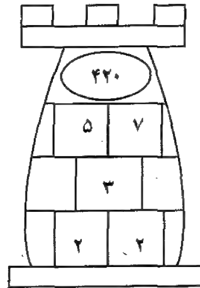
۱. عددهای اول و مرکب

در میان عددهای طبیعی به دو دسته عدد برمی‌خوریم: عددهای اول و عددهای مرکب. عددی طبیعی در صورتی مرکب است که برابر با حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی کوچکتر از خودش باشد. مثلاً، ۶ مرکب است، زیرا $۶ = ۲ \times ۳$. در غیر این صورت، و چنانچه عدد مورد نظر ۱ نباشد، آن را اول می‌نامند. عدد ۱ نه اول است نه مرکب.

عددهای اول شبیه «آجرهای» ساختمان‌اند، زیرا می‌توانید همهٔ عددهای طبیعی را با استفاده از آنها بسازید. اما چطور می‌توان این کار را انجام داد؟ عدد ۴۲۰ را در نظر می‌گیریم. شکی نیست که این عدد مرکب است. مثلاً می‌توان آن را به شکل ۴۲×۱۰ نوشت. اما هر یک از عددهای ۴۲ و ۱۰ هم خودشان مرکب‌اند. در حقیقت، $۴۲ = ۶ \times ۷$ و $۱۰ = ۲ \times ۵$. چون $۶ = ۲ \times ۳$، پس

$$۴۲۰ = ۴۲ \times ۱۰ = ۶ \times ۷ \times ۲ \times ۵ = ۲ \times ۳ \times ۷ \times ۲ \times ۵ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۵ \times ۷$$

(شکل ۱۲ را ببینید). این «تجزیهٔ» کامل عدد ۴۲۰ است (یعنی نمایش آن به شکل حاصل‌ضربی از عددهای اول).



شکل ۱۲

روشن است که می‌توانیم هر عدد طبیعی بزرگتر از ۱ را هم به همین طریق تجزیه کنیم. برای این کار فقط کافی است همین‌طور پشت سرهم تا آنجا که ممکن است عددهایی را که در هر مرحله به‌دست می‌آوریم به دو عدد کوچکتر تجزیه کنیم (و چنانچه عاملی از این عوامل را نتوان به شکل چنین حاصل‌ضربی نمایش داد آن‌وقت این عامل عددی اول است).

اما اگر سعی کنیم عدد ۴۲۰ را به طریق دیگری تجزیه کنیم چه پیش می‌آید؟ مثلاً می‌توانیم با تجزیه ۴۲۰ = ۱۵ × ۲۸ شروع کنیم. ممکن است باعث تعجبتان شود که بدانید همیشه به همان نمایش می‌رسیم (حاصل‌ضربهایی که فقط در ترتیب عواملشان با هم فرق دارند یکی محسوب می‌شوند؛ معمولاً عاملها را به ترتیب صعودی می‌نویسیم).

ممکن است درستی این مطلب واضح به‌نظر برسد، اما اثباتش آسان نیست. این حکم را **قضیهٔ اساسی حساب** می‌نامند: هر عدد طبیعی بجز ۱ را می‌توان به‌طور یکتا به شکل حاصل‌ضربی از عددهای اول، به ترتیب صعودی، نمایش داد.

توصیه به معلمان. بیشتر مطالب این بخش به قضیهٔ اساسی حساب مربوط می‌شوند.

دانش‌آموزان باید درک کنند که ویژگیهای بخش‌پذیری تقریباً به‌طور کامل با نمایش عددهای طبیعی به شکل حاصل‌ضرب عددهای اول مشخص می‌شوند. تمرینهای زیر برای این منظور سودمندند.

۱. آیا $۲^۹ \times ۳$ بر ۲ بخش‌پذیر است؟

پاسخ: بله، چون ۲ یکی از عاملها در تجزیهٔ عدد داده شده است.

۲. آیا $۲^۹ \times ۳$ بر ۵ بخش‌پذیر است؟

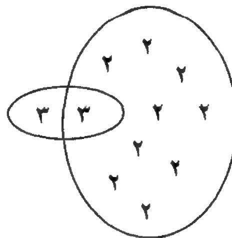
پاسخ: خیر، چون تجزیهٔ این عدد شامل عدد اول ۵ نیست.

۳. آیا $۲^۹ \times ۳$ بر ۸ بخش‌پذیر است؟

پاسخ: بله، چون $۲^۳ = ۸$ و نه تا ۲ در تجزیهٔ عدد داده شده وجود دارد.

۴. آیا ۳×۲^۹ بر ۹ بخش‌پذیر است؟

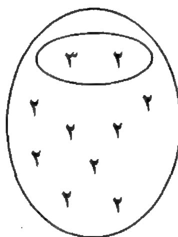
پاسخ: خیر، چون $۳ \times ۳ = ۹$ و فقط یک عدد ۳ در تجزیهٔ عدد داده شده وجود دارد (شکل ۱۳ را ببینید).



شکل ۱۳

۵. آیا ۳×۲^۹ بر ۶ بخش‌پذیر است؟

پاسخ: بله، چون $۳ \times ۲ = ۶$ و تجزیهٔ عدد داده شده شامل هر دو عدد اول ۲ و ۳ است (شکل ۱۴ را ببینید).



شکل ۱۴

۶. آیا درست است که اگر عددی طبیعی بر ۴ و ۳ بخش‌پذیر باشد، باید بر ۳×۴ یا ۱۲ هم بخش‌پذیر باشد؟

پاسخ: بله، در واقع تجزیهٔ عددی طبیعی که بر ۴ بخش‌پذیر است باید شامل دست‌کم دو عدد ۲ باشد. از طرف دیگر، چون این عدد بر ۳ هم بخش‌پذیر است، در تجزیه‌اش دست‌کم یک عدد ۳ هم وجود دارد. بنابراین عدد موردنظر بر $۲ \times ۲ \times ۳$، یعنی ۱۲، بخش‌پذیر است.

۷. آیا درست است که اگر عددی طبیعی بر ۴ و ۶ بخش‌پذیر باشد، باید بر ۶×۴ یا ۲۴ هم بخش‌پذیر باشد؟

پاسخ: خیر. مثالی نقض، عدد ۱۲ است. دلیلش این است که اگر عددی بر ۴ بخش‌پذیر باشد، تجزیه‌اش شامل دست‌کم دو عدد ۲ است؛ اگر این عدد بر ۶ هم بخش‌پذیر باشد، بدان معناست که

تجزیه‌اش شامل عددهای ۲ و ۳ است. بنابراین می‌توان خاطرجمع بود که تجزیهٔ این عدد شامل دو تا (اما نه الزاماً سه‌تا!) عدد ۲ و عدد ۳ است و از این رو فقط می‌توانیم ادعا کنیم که عدد موردنظر بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

۸. عدد A بر ۳ بخش‌پذیر نیست. آیا ممکن است که عدد $۲A$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

پاسخ: خیر، چون عدد ۳ در تجزیهٔ A وجود ندارد و بنابراین در تجزیهٔ $۲A$ هم نمی‌آید.

۹. عدد A زوج است. آیا درست است که $۳A$ باید بر ۶ بخش‌پذیر باشد؟

پاسخ: بله، چون هر دو عدد ۲ و ۳ در تجزیهٔ عدد $۳A$ وجود دارند.

۱۰. عدد $۵A$ بر ۳ بخش‌پذیر است. آیا درست است که A باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد؟

پاسخ: بله، چون تجزیهٔ $۵A$ شامل عدد ۳ است در حالی که تجزیهٔ عدد ۵ شامل آن نیست.

۱۱. عدد $۱۵A$ بر ۶ بخش‌پذیر است. آیا درست است که A باید بر ۶ بخش‌پذیر باشد؟

پاسخ: خیر. مثلاً ممکن است که A عدد ۲ باشد. دلیلش این است که عدد ۳ که یکی از عاملهای اول عدد ۶ است در تجزیهٔ عدد ۱۵ هم می‌آید. بنابراین می‌توان فقط خاطرجمع بود که A عددی زوج است.

تعریف مهم

دو عدد طبیعی را در صورتی نسبت به هم اول یا متباین می‌نامند که مقسوم‌علیه مشترکی بزرگتر از ۱ نداشته باشند.

مثلاً، بدیهی است که دو عدد اول متمایز نسبت به هم اول‌اند. از این گذشته، عدد ۱ نسبت به هر عدد طبیعی دیگر اول است.

با استفاده از استدلالی شبیه استدلال تمرینهای ۶ و ۱۰ می‌توانیم دو حکم زیر را ثابت کنیم.

الف) اگر عددی طبیعی بر دو عدد نسبت به هم اول p و q بخش‌پذیر باشد، بر حاصلضربشان، یعنی pq، هم بخش‌پذیر است.

ب) اگر عدد pA بر q بخش‌پذیر باشد، که در اینجا p و q نسبت به هم اول‌اند، آن‌وقت A هم بر q بخش‌پذیر است.

توصیه به معلمان. دانش‌آموزان باید چندین مثال را بررسی و حل کنند. مسأله‌های مربوط به عددهای نسبت به هم اول را در پایان این بخش آورده‌ایم.

دو تعریف مهمتر

۱. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م. یا (x,y)) دو عدد طبیعی برابر است با ... شما چه فکر می‌کنید؟ ... بزرگترین عدد طبیعی که هر دو آنها را می‌شمارد.

۲. کوچکترین مضرب مشترک (ک.م.م. یا $[x, y]$) دو عدد طبیعی برابر است با ... باز حدس بزنید ... کوچکترین عدد طبیعی که بر هر دو آنها بخش‌پذیر است.
مثلاً $۶ = (۱۸, ۲۴)$ و $۷۲ = [۱۸, ۲۴]$.
با این تعریفها می‌توانیم چند تمرین دیگر را هم بیان کنیم.

۱۲. عددهای $A = ۲^۳ \times ۳^{۱۰} \times ۵ \times ۷^۲$ و $B = ۲^۵ \times ۳ \times ۱۱$ داده شده‌اند. مقدار (A, B) را پیدا کنید.
پاسخ: $(A, B) = ۲۴ = ۲^۳ \times ۳$. این عدد بخش مشترک («اشتراک») تجزیه‌های دو عدد A و B است.

۱۳. عددهای $A = ۲^۸ \times ۵^۳ \times ۷$ و $B = ۲^۵ \times ۳ \times ۵^۷$ داده شده‌اند. مقدار $[A, B]$ را پیدا کنید.
پاسخ: $[A, B] = ۴۲۰۰۰۰۰۰۰۰ = ۲^۸ \times ۳ \times ۵^۷ \times ۷$. همان‌طور که می‌بینید، این عدد «اجتماع» تجزیه‌های دو عدد A و B است.

توصیه به معلمان. از شما می‌خواهیم که مطالب این بخش را فقط به‌عنوان کلیات طرح درسی برای یک جلسهٔ واقعی کلاس در نظر بگیرید. به‌عنوان معلم حتماً مایلید که طرح درسی مفصلتر طرح‌ریزی کنید. در بعضی جاها احتمالاً مجموعه‌ای از مسأله‌ها یا تمرینهای بسیار شبیه به هم را یکی بعد از دیگری به دانش‌آموزان می‌دهید و در عین حال سعی می‌کنید که موضوعات مسأله‌ها همچنان متنوع باشند. دانش‌آموزان را تشویق کنید تا در مورد مسأله‌ها و قضیه‌هایی که دربارهٔ آنها بحث می‌کنید خودشان حدس بزنند.

با وجود این، دانش‌آموزان در صورتی این مبحث را به بهترین وجه ممکن فرا می‌گیرند که در جلسات بعدی با استفاده از ایده‌هایی که در بالا شرح داده شدند مسأله‌هایی برایشان مطرح کنید.

در اینجا چندتا از این مسأله‌ها آورده‌ایم. روشها و ایده‌هایی که در این بخش معرفی شدند هم در حل مسأله‌های بخشهای دیگر این فصل به کار می‌آیند هم در حل مسأله‌های فصلهای دیگر کتاب حاضر.

مسألهٔ ۱. دو عدد اول متمایز p و q داده شده‌اند. تعداد مقسوم‌علیه‌های متمایز عدد

الف) pq؛
ب) $p^۲q$؛
ج) $p^۲q^۲$؛
د) p^nq^m،

را پیدا کنید.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید حاصل‌ضرب هر سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

راهنمایی: در میان هر سه عدد متوالی دست‌کم یک عدد زوج و یک عدد بخش‌پذیر بر ۳ وجود دارد.

راه‌حل. هر عددی که بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر باشد بر ۶ هم بخش‌پذیر است و در نتیجه، حکم موردنظر مستقیماً از راهنمایی بالا به‌دست می‌آید.

مسألهٔ ۳. ثابت کنید حاصل‌ضرب هر پنج عدد طبیعی متوالی

الف) بر ۳۰؛

ب) بر ۱۲۰؛

بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۴. عددی اول مانند p داده شده است. تعداد عددهایی طبیعی را پیدا کنید که

الف) از p کوچکتر و نسبت به آن اول‌اند؛

ب)از p^2 کوچکتر و نسبت به آن اول‌اند.

مسألهٔ ۵. کوچکترین عدد طبیعی مانند n را پیداکنید که $n!$ بر ۹۹۰ بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۶. نمایش اعشاری عدد !۱۰۰ به چند تا صفر ختم می‌شود؟

مسألهٔ ۷. آیا ممکن است که به‌ازای عددی طبیعی مانند n نمایش اعشاری عدد $n!$ دقیقاً به پنج تا صفر ختم شود؟

مسألهٔ ۸. ثابت کنید اگر تعداد مقسوم‌علیه‌های عددی فرد باشد، این عدد مربع کامل است.

مسألهٔ ۹. تام دو عدد دورقمی را روی تخته‌سیاه در هم ضرب کرد. بعد همهٔ رقمها را با حروف عوض کرد (به‌جای رقمهای متمایز حروف متفاوت گذاشت و به‌جای رقمهای برابر حروف یکسان)؛ نتیجه شد $\mathrm{AB} \times \mathrm{CD} = \mathrm{EEFF}$. ثابت کنید که تام جایی درکارش اشتباه کرده است.

مسألهٔ ۱۰. آیا ممکن است عددی که با صد تا ۰، صد تا ۱ و صد تا ۲ نوشته شده است مربع کامل باشد.

راهنمایی: چنین عددی بر ۳ بخش‌پذیر است اما بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

راه‌حل. مجموع رقمهای هر یک از آن دست عددهایی که در مسأله مشخص شده‌اند برابر با ۱۰۰(۰ + ۱ + ۲) یا ۳۰۰ است که بر ۳ بخش‌پذیر است اما بر ۹ بخش‌پذیر نیست. این موضوع دربارهٔ عدد موردنظرمان، صرفنظر از اینکه ترتیب رقمهایش چه باشد، درست است.

توصیه به معلمان. باید توجه دانش‌آموزان را به ایدهٔ راه‌حل مسألهٔ آخر جلب کنید. برای این کار مثلاً می‌توانید از آنها بپرسید در صورتی‌که عدد موردنظر دویست تا ۰، دویست تا ۱ و دویست تا ۲ داشته باشد، پاسخ مسأله چیست؟ با سیصد تا ۰، سیصد تا ۱ و سیصد تا ۲ چطور؟

مسألهٔ ۱۱ *. عددهای a و b در تساوی $56a = 65b$ صدق می‌کنند. ثابت کنید $a+b$ عددی مرکب است.

مسألهٔ ۱۲. همهٔ جوابهای معادله‌های

الف) $x^2 - y^2 = 31$؛

ب) $x^2 - y^2 = 303$،

را در مجموعهٔ عددهای طبیعی پیدا کنید.

راهنمایی: $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

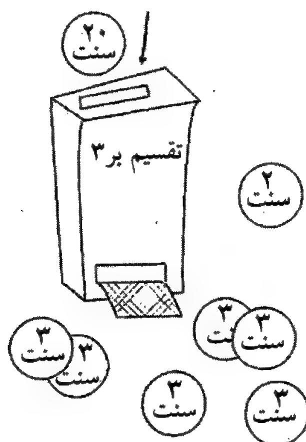
مسألهٔ ۱۳. ریشه‌های صحیح معادلهٔ $x^3 + x^2 + x - 3 = 0$ را پیدا کنید.

راهنمایی: به دو طرف معادله عدد ۳ را اضافه کنید و بعد طرف چپ آن را تجزیه کنید.

مسألهٔ ۱۴. ثابت کنید هر دو عدد طبیعی مانند a و b در تساوی $(a,b)[a,b] = ab$ صدق می‌کنند.

۲. باقی‌مانده‌ها

فرض کنید در کشوری هستید که در آن سکه‌هایی به برخی مقادیر رایج‌اند و می‌خواهید از یک دستگاه سکه‌ای یک عدد آدامس به قیمت ۳ سنت بخرید. در جیبتان یک سکهٔ ۱۵ سنتی دارید، اما هیچ سکهٔ ۳ سنتی‌ای که برای خریدن آدامس لازم است ندارید. با خوش‌اقبالی یک دستگاه پول خردکن پیدا می‌کنید که از آن می‌توانید هر تعداد سکهٔ ۳ سنتی که لازم دارید بگیرید. روشن است که بابت سکه ۱۵ سنتی‌تان پنج سکهٔ ۳سنتی از این دستگاه می‌گیرید. اما اگر سکه‌ای ۲۰ سنتی داشته باشید چه پیش می‌آید؟ در این صورت به طور قطع شش سکهٔ ۳ سنتی می‌گیرید به‌علاوه دو سنت بقیهٔ پول. بنابراین در اینجا $20 = 6 \times 3 + 2$ (شکل ۱۵ را ببینید). این تساوی نمایشی از عمل تقسیم ۲۰ بر ۳ با باقی‌مانده است.



شکل ۱۵

دستگاه پول‌خردکنمان چطورکار می‌کند؟ این دستگاه همین‌طور سکه‌های ۳ سنتی را بیرون می‌دهد تا وقتی که باقی‌مانده از ۳ کمتر شود. بعد از آن، این دستگاه به شما سکه‌هایی بابت این باقی‌مانده که برابر با ۰، ۱ یا ۲ است می‌دهد. روشن است که این باقی‌مانده وقتی و فقط وقتی صفر است که عدد اولیه (ارزش سکه‌ای که در دستگاه انداختید) بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

به همین ترتیب می‌توانیم دستگاهی را مجسم کنیم که سکه‌های m سنتی بیرون می‌دهد و بقیهٔ پول در آن از ۰ تا $m - ۱$ سنت است. با این دستگاه می‌توان عمل تقسیم بر m با باقی‌مانده را نمایش داد.

اکنون تعریفی دقیقتر می‌آوریم:

تقسیم عددی طبیعی مانند N بر عدد طبیعی m با باقی‌مانده، یعنی نمایش N به شکل $N = km + r$ که در آن $۰ \leqslant r < m$. عدد r را باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد N بر m می‌نامیم.

اکنون مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید: شخصی بیست و دو سکهٔ ۵۰ سنتی و چهل و چهار سکهٔ ۱۰ سنتی را در دستگاه پول خردکن می‌اندازد. بعد از اینکه سکه‌های ۳ سنتی را دریافت کرد بقیهٔ پولش چقدر می‌شود؟

حل این مسأله آسان است. کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۱۰ \times ۴۴ + ۵۰ \times ۲۲$ را، که آن را با x نشان می‌دهیم، بر ۳ پیدا کنیم. آنچه در اینجا قابل توجه است این است که نباید مجموع همهٔ این حاصل‌ضربها را حساب کنیم. فرض کنید که باقی‌مانده‌های تقسیم هر یک از این عددها بر ۳ را جایگزین آنها کنیم. در این صورت عدد x به عدد $۱ \times ۲ + ۲ \times ۱$ تبدیل می‌شود. این عدد برابر با ۴ است که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن هم بر ۳ می‌شود ۱. ادعا می‌کنیم که باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت اولیه (یعنی عدد x) هم بر ۳ می‌شود ۱. علت درستی این ادعا حکم زیر است که همیشه درست است:

لم باقیمانده‌ها. باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع حاصل‌ضرب هر دو عدد طبیعی بر ۳ همان باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع حاصل‌ضرب باقی‌مانده‌هایشان بر ۳ است.

یادداشت. اثبات این حکم چندان دشوار نیست، گرچه ممکن است به‌نظر تازه‌کارها پر از ریزه‌کاریهای فنی باشد.

برای نمونه حکم دوم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید

$$N_۱ = k_۱ \times ۳ + r_۱$$

$$N_۲ = k_۲ \times ۳ + r_۲$$

در این صورت

$$\begin{aligned} N_۱ N_۲ &= (k_۱ \times ۳ + r_۱)(k_۲ \times ۳ + r_۲) \\ &= k_۱ k_۲ \times ۳^۲ + k_۱ r_۲ \times ۳ + k_۲ r_۱ \times ۳ + r_۱ r_۲ \\ &= ۳(۳k_۱ k_۲ + k_۱ r_۲ + k_۲ r_۱) + r_۱ r_۲ \end{aligned}$$

بنابراین در خرد کردن N_1N_2 سنت، دستگاه $3k_1k_2 + k_1r_2 + k_2r_1$ تا سکهٔ ۳۰ سنتی بیرون می‌دهد و r_1r_2 سنت در آن می‌ماند. از این‌رو، بعد از انداختن N_1N_2 سنت در دستگاه، باقی‌مانده همان باقی‌ماندهٔ انداختن r_1r_2 سنت در دستگاه است.

بدیهی است که در لم باقی‌مانده عدد ۳ را می‌توان با هر عدد طبیعی دیگر عوض کرد: در مورد هر عدد دیگر هم همین اثبات عیناً به‌کار می‌رود.

توصیه به معلمان. از تعمیمهای لم باقی‌مانده‌ها در سراسر این بخش استفاده می‌شود. دانش‌آموزانتان باید یاد بگیرند که چطور این ایده‌ها را هنگام محاسبهٔ باقی‌مانده‌ها به‌کار ببرند. توصیه می‌کنیم که تعدادی مسأله شبیه مسألهٔ ۱۵ در زیر را سر کلاس حل کنید و توجه دانش‌آموزان را به چگونگی استفاده از این حکمها جلب کنید.

گمان نمی‌کنیم بحث دربارهٔ اثبات لم باقی‌مانده‌ها سر کلاسها خیلی هم ضروری باشد.

مسألهٔ ۱۵. باقی‌ماندهٔ تقسیم

الف) عدد $1989 \times 1990 \times 1991 + 1992^3$ بر ۷؛

ب) عدد 9^{100} بر ۸،

را پیدا کنید.

راه‌حل مسألهٔ بعدی شامل ایده‌ای بسیار مهم است.

مسألهٔ ۱۶. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n عدد $n^3 + 2n$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد n بر ۳ یکی از این عددهاست: ۰، ۱ یا ۲. بنابراین سه حالت در نظر می‌گیریم.

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم n بر ۳ برابر با ۰ باشد، آن‌وقت هم n^3 بر ۳ بخش‌پذیر است و هم $2n$ و در نتیجه $n^3 + 2n$ هم بر ۳ بخش‌پذیر است.

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم n بر ۳ برابر با ۱ باشد، آن‌وقت باقی‌مانده‌های تقسیم n^3 و $2n$ بر ۳ به‌ترتیب ۱ و ۲اند و $1 + 2$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

اگر هم باقی‌ماندهٔ تقسیم n بر ۳ برابر با ۲ باشد، آن‌وقت باقی‌مانده‌های تقسیم n^2، n^3 و $2n$ بر ۳ به‌ترتیب ۱، ۲ و ۱اند و $2 + 1$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

با این تحلیل حالت به حالت اثبات حکم موردنظرمان کامل می‌شود.

توصیه به معلمان. نکتهٔ اصلی راه‌حل مسألهٔ آخر ایدهٔ تحلیل حالت به حالت است که برای بررسی همهٔ باقی‌مانده‌های ممکن به پیمانهٔ عددی طبیعی استفاده شده است. این روش آن‌قدر ارزشمند است

که باید آن را برای دانش‌آموزان کاملاً شرح داد. دانش‌آموزان باید بفهمند که با چنین تحلیلی واقعاً اثباتی کامل و دقیق به‌دست می‌آید.

تحلیل حالت به حالتِ را می‌توان به غیر از حساب در بسیاری از جاهای دیگر هم به‌کار برد. برای دانش‌آموزان فراگیری این مهارت بسیار خوب است که بتوانند تشخیص دهند که آیا تحلیلی حالت به حالت در حل مسأله‌ای به‌کار می‌آید یا نه. امیدواریم که مسأله‌های زیر در تحقق این هدف مفید باشند.

مسألهٔ ۱۷. ثابت کنید که به ازای هر عدد صحیح مانند n، $n^5 + 4n$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۱۸. ثابت کنید که به ازای هیچ عدد صحیحی مانند n، $n^2 + 1$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

مسألهٔ ۱۹. ثابت کنید که به ازای هیچ عدد صحیحی مانند n، $n^3 + 2$ بر ۹ بخش‌پذیر نیست.

مسألهٔ ۲۰. ثابت کنید که به ازای هر عدد فرد مانند n، $n^3 - n$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است.
راهنمایی: ثابت کنید که عدد داده شده هم مضربی از ۳ است و هم‌مضربی از ۸.

مسألهٔ ۲۱. الف) اگر p عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد، ثابت کنید $p^2 - 1$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است.
ب) اگر p و q عددهایی اول و بزرگتر از ۳ باشند، ثابت کنید $p^2 - q^2$ بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۲۲. عددهای طبیعی x، y و z در تساوی $x^2 + y^2 = z^2$ صدق می‌کنند. ثابت کنید دست‌کم یکی از آنها بر ۳ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۲۳. می‌دانیم که a و b عددهایی طبیعی‌اند که $a^2 + b^2$ بر ۲۱ بخش‌پذیر است. ثابت کنید همین مجموع مربعها بر ۴۴۱ هم بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۲۴. می‌دانیم که a، b و c عددهایی طبیعی‌اند و $a + b + c$ بر ۶ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $a^3 + b^3 + c^3$ هم بر ۶ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۲۵. سه عدد اول p، q و r که همه از ۳ بزرگترند، تصاعدی حسابی تشکیل داده‌اند: $p = p$، $q = p + d$ و $r = p + 2d$. ثابت کنید d بر ۶ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۲۶. ثابت کنید اگر از مجموع مربعهای سه عدد طبیعی دلخواه عدد ۷ را کم کنیم، عدد حاصل بر ۸ بخش‌پذیر نیست.

مسألهٔ ۲۷. مجموع مربعهای سه عدد طبیعی بر ۹ بخش‌پذیر است. ثابت کنید می‌توان دو تا از این مربعها را طوری انتخاب کرد که تفاضلشان بر ۹ بخش‌پذیر باشد.

راهنمایی: اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد بر ۹ برابر باشند، تفاضلشان بر ۹ بخش‌پذیر است.

* * *

با مجموعه‌ای دیگر از مسأله‌ها این بخش را پی‌می‌گیریم.

مسألهٔ ۲۸. رقم یکان عدد $۱۹۸۹^{۱۹۸۹}$ را پیدا کنید.

راه‌حل. ابتدا توجه کنید که رقم یکان عدد $۱۹۸۹^{۱۹۸۹}$ عین رقم یکان عدد $۹^{۱۹۸۹}$ است. رقم یکان تعدادی از نخستین توانهای ۹ را می‌نویسیم: ۹، ۱، ۹، ۱، ۹، . . . .

برای محاسبهٔ رقم یکان توانی از ۹ کافی است که رقم یکان توان قبلی ۹ را در ۹ ضرب کنیم. از این رو، کاملاً روشن است که بعد از رقم ۹ همیشه رقم ۱ می‌آید ($۸۱ = ۹ \times ۹$) و پشت سر آن هم همیشه ۹ می‌آید ($۹ = ۹ \times ۱$).

بنابراین رقم یکان توانهای با نمای فرد ۹ همیشه ۹ است. در نتیجه رقم یکان عدد $۱۹۸۹^{۱۹۸۹}$ هم ۹ است.

مسألهٔ ۲۹. رقم یکان عدد $۲^{۵۰}$ را پیدا کنید.

راه‌حل. رقم یکان تعدادی از نخستین توانهای ۲ را می‌نویسیم: ۲، ۴، ۸، ۶، ۲، . . . . می‌توان دریافت که $۲^۵$ مانند $۲^۱$ به ۲ ختم می‌شود. چون رقم یکان هر توان ۲ از روی رقم یکان توان قبلی ۲ تعیین می‌شود یک دور به‌دست می‌آید: $۲^۶$ به ۴ ختم می‌شود (مانند $۲^۲$)، $۲^۷$ به ۸ (مانند $۲^۳$)، $۲^۸$ به ۶، $۲^۹$ به ۲ و همین‌طور تا آخر. چون طول این دور ۴ است، رقم یکان عدد $۲^{۵۰}$ را می‌توان با استفاده از باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۵۰ بر ۴ پیدا کرد. این باقی‌مانده ۲ است و درنتیجه رقم یکان $۲^{۵۰}$ برابر با رقم یکان $۲^۲$، یعنی ۴، است.

مسألهٔ ۳۰. رقم یکان عدد $۷۷۷^{۷۷۷}$ چیست؟

مسألهٔ ۳۱. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۲^{۱۰۰}$ بر ۳ را پیدا کنید.

راهنمایی: باقی‌مانده‌های تقسیم چند تا از توانهای ۲ بر ۳ را بنویسید. ثابت کنید که این باقی‌مانده‌ها دور تشکیل می‌دهند.

مسألهٔ ۳۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۳^{۱۹۸۹}$ بر ۷ را پیدا کنید.

مسألهٔ ۳۳. ثابت کنید عدد $۵۵۵۵^{۲۲۲۲} + ۲۲۲۲^{۵۵۵۵}$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

راهنمایی: ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد داده شده بر ۷ صفر است.

مسألهٔ ۳۴. رقم یکان عدد 7^{7^7} را پیدا کنید.

در مسأله‌های ۱۶ تا ۲۷ از همان ایدهٔ تحلیل حالت به حالت باقی‌مانده‌ها به پیمانهٔ عددی طبیعی مانند n استفاده کردیم. از این گذشته، در آنجا می‌توانستیم عدد n را از صورت مسأله‌ها تقریباً بی‌هیچ زحمتی تشخیص دهیم. در مجموعه مسأله‌های بعدی حدس زدن عدد n چندان آسان نیست. «هنر حدس زدن» نیازمند برخی مهارتهاست و با وجود اینکه شگردهای شناخته شده‌ای برایش وجود دارد بعضی وقتها ممکن است واقعاً دشوار باشد.

توصیه به معلمان. برای تداوم بخشیدن به ارتقای مهارتهای ذکر شده پیشنهاد می‌کنیم که به‌عنوان تمرین جدول ضربهایی برای باقی‌مانده‌های تقسیم بر عددهای «پُرکاربردی» مانند ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۱، ۱۳ و غیره تنظیم کنید. همچنین می‌توانید سعی کنید که همهٔ باقی‌مانده‌های ممکن تقسیم مربعها و مکعبهای کامل بر این عددها را پیدا کنید.

مسألهٔ ۳۵. الف) می‌دانیم که p، $p + 10$ و $p + 14$ عددهایی اول‌اند. عدد p را پیدا کنید.

ب) می‌دانیم که p، $2p + 1$ و $4p + 1$ عددهایی اول‌اند. عدد p را پیدا کنید.

راهنمایی: باقی‌ماندهٔ تقسیم این عددها بر ۳ را پیدا کنید.

مسألهٔ ۳۶. می‌دانیم که p و $8p^2 + 1$ عددهایی اول‌اند. عدد p را پیدا کنید.

مسألهٔ ۳۷. می‌دانیم که p و $p^2 + 2$ عددهایی اول‌اند. ثابت کنید $p^3 + 2$ هم عددی اول است.

مسألهٔ ۳۸. ثابت کنید که عددهایی طبیعی مانند a و b وجود ندارند که $a^2 - 3b^2 = 8$.

مسألهٔ ۳۹. الف) آیا ممکن است مجموع دو مربع کامل فرد مربع کامل دیگری باشد؟

ب) آیا ممکن است مجموع مربعهای سه عدد طبیعی فرد مربع کامل باشد؟

مسألهٔ ۴۰. ثابت کنید مجموع مربعهای پنج عدد طبیعی متوالی مربع کامل نیست.

مسألهٔ ۴۱. اگر p، $4p^2 + 1$ و $6p^2 + 1$ عددهایی اول باشند، عدد p را پیدا کنید.

یادداشت. تقریباً در بیشتر موارد مسأله‌های حساب دربارهٔ مربعها (مانند مسأله‌های ۳۶ تا ۴۰) را می‌توان با استفاده از باقی‌مانده‌ها به‌پیمانهٔ ۳ یا به‌پیمانهٔ ۴ حل کرد. نکتهٔ اصلی این است که باقی‌مانده‌های تقسیم مربعهای کامل بر ۳ یا ۴ فقط ممکن است عددهای ۰ و ۱ باشند.

مسألهٔ ۴۲. ثابت کنید عدد ۱۰۰۰۰۰۰۰۵۰۰۰۰۰۰۰۱ (در هر طرف رقم ۵، ۱۰۰ تا صفر وجود دارد) مکعب کامل نیست.

مسألهٔ ۴۳. ثابت کنید به‌ازای هیچ دو عدد طبیعی مانند a و b عدد $a^۳+b^۳+۴$ مکعب کامل نیست.

مسألهٔ ۴۴*. ثابت کنید به‌ازای هیچ عدد طبیعی‌ای مانند n عدد $۶n^۳+۳$ توان ششم کامل عددی صحیح نیست.

یادداشت. هنگام حل کردن مسأله‌های مربوط به مکعبهای عددهای صحیح (مانند مسأله‌های ۴۲ تا ۴۴) بیشتر وقتها مفید است که باقی‌مانده‌ها به‌پیمانهٔ ۷ یا ۹ را بررسی کنیم. در هر یک از این دو حالت فقط سه باقی‌مانده وجود دارد: به‌ترتیب $\{۰, ۱, ۶\}$ و $\{۰, ۱, ۸\}$.

مسألهٔ ۴۵*. می‌دانیم x، y و z عددهایی طبیعی‌اند که $x^۲+y^۲=z^۲$. ثابت کنید xy بر ۱۲ بخش‌پذیر است.

توصیه به معلمان. از مطالب این بخش می‌توان دست‌کم در دو جلسهٔ کلاس استفاده کرد. نخستین جلسه باید به محاسبهٔ باقی‌مانده‌ها اختصاص یابد. دومین جلسه را می‌توان صرف بررسی ایدهٔ تحلیل حالت به حالت در حل مسأله‌های گوناگون کرد.

۳. چند مسألهٔ دیگر

این بخش شامل مجموعه‌ای از مسأله‌های مربوط به بخش‌پذیری است که نه صورتشان شبیه هم است و نه روش حلشان. البته در اینجا هم از ایده‌ها و روشهای بخشهای قبلی استفاده می‌کنیم.

مسألهٔ ۴۶. الف) اگر بدانیم $a+۱$ بر ۳ بخش‌پذیر است، ثابت کنید که $۴+۷a$ هم بر ۳ بخش‌پذیر است.

ب) می‌دانیم که $a+۲$ و $۳۵-b$ بر ۱۱ بخش‌پذیرند. ثابت کنید $a+b$ هم بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۴۷. رقم یکان عدد $۱^۲+۲^۲+\cdots+۹۹^۲$ را پیدا کنید.

مسألهٔ ۴۸. هفت عدد طبیعی چنان‌اند که مجموع هر شش‌تایشان بر ۵ بخش‌پذیر است. ثابت کنید هریک از این عددها هم بر ۵ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۴۹. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی و بزرگتر از ۱ مانند n، مجموع هر n عدد طبیعی فرد متوالی عددی مرکب است.

مسألهٔ ۵۰. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که باقی‌ماندهٔ تقسیمش بر ۲، ۱، بر ۳، ۲، بر ۴، ۳، بر ۵، ۴ و بر ۶، ۵ باشد.

مسألهٔ ۵۱. ثابت کنید اگر $(n-1)!+1$ بر n بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت n عددی اول است.

دو مسألهٔ زیر را مفصلتر بررسی می‌کنیم:

مسألهٔ ۵۲*. ثابت کنید عددی طبیعی مانند n وجود دارد که عددهای $n+1$، $n+2$، ...، $n+1989$ همگی مرکب‌اند.

راه‌حل. سعی می‌کنیم شرح دهیم که چطور می‌توان جوابی برای مسأله به‌دست آورد. عدد $n+1$ باید مرکب باشد. برای اینکه راه‌حل پیچیده نشود فرض می‌کنیم این عدد بر ۲ بخش‌پذیر باشد. دراین صورت عدد $n+2$ هم باید مرکب باشد، اما دیگر ممکن نیست مضربی از ۲ باشد. باز هم برای پرهیز از پیچیده شدن راه‌حل فرض می‌کنیم این عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد. همین‌طور پیش می‌رویم و سعی می‌کنیم عددی مانند n بیابیم که $n+1$ بر ۲ بخش‌پذیر باشد، $n+2$ بر ۳، $n+3$ بر ۴ و همین‌طور تا آخر. اما این مطلب معادل این است که بگوییم $n-1$ بر عددهای ۲، ۳، ۴، ... و ۱۹۹۰ بخش‌پذیر است.

اکنون دیگر یافتن چنین عددی آسان است؛ مثلاً $1990!$ چنین عددی است. بنابراین می‌توانیم $1990!+1$ را به‌عنوان عددی که دنبالش می‌گردیم انتخاب کنیم.

مسألهٔ ۵۳*. ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول وجود دارد.

راه‌حل. فرض کنید فقط n تا عدد اول وجود داشته باشد و آنها را با p_1، p_2، ... و p_n نشان دهید. در این صورت عدد $p_1p_2\cdots p_n+1$ بر هیچ یک از عددهای اول p_1، p_2، ... و p_n بخش‌پذیر نیست. در نتیجه این عدد طبیعی را نمی‌توان به‌شکل حاصل‌ضرب عددهای اول نمایش داد که چنین چیزی درست نیست. با این تناقض راه‌حل مسأله کامل می‌شود.

توصیه به معلمان. مسأله‌های این بخش را نباید طی یک جلسه به دانش‌آموزان داد و انتظار داشت که آنها را حل کنند. می‌توان آنها را در طول یک سال تحصیلی به دانش‌آموزان داد یا از آنها برای المپیادها، انواع گوناگون مسابقات ریاضی و فعالیتهایی از این قبیل استفاده کرد.

۴. الگوریتم اقلیدسی

در بخش اول این فصل مفهوم بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد طبیعی را مطرح کردیم و نشان دادیم که چطور می‌توان ب.م.م. را حساب کرد: باید تجزیه‌های هر دو عدد به حاصل‌ضرب عددهای اول را بنویسید و بعد بخش مشترکشان را حساب کنید.

البته، در مورد عددهای بزرگ استفاده از این روش بدون ماشین حساب عملاً غیرممکن است (سعی کنید این روش را مثلاً در مورد عددهای ۱۳۸۱۹۵۵ و ۶۹۰۷۱۳ اجرا کنید). خوشبختانه راهی

دیگر برای محاسبهٔ ب.م.م. وجود دارد که زحمتش کمتر از قبلی است و آن را الگوریتم اقلیدسی می‌نامند.

این روش بر اساس استدلالی ساده است: هر مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b $(a > b)$ عدد $a - b$ را هم می‌شمارد؛ علاوه بر این، هر مقسوم‌علیه مشترک عددهای b و $a - b$ عدد a را هم می‌شمارد. بنابراین $(a, b) = (b, a - b)$. این تساوی، به تعبیری جان کلام الگوریتم اقلیدسی است.

در اینجا نشان می‌دهیم که این الگوریتم در مورد دو عدد ۴۵۱ و ۲۸۷ چطور عمل می‌کند:

$$\begin{aligned}(۴۵۱, ۲۸۷) &= (۲۸۷, ۱۶۴)\\ &= (۱۶۴, ۱۲۳)\\ &= (۱۲۳, ۴۱)\\ &= (۸۲, ۴۱)\\ &= (۴۱, ۴۱)\\ &= ۴۱\end{aligned}$$

توجه کنید که الگوریتم اقلیدسی را می‌توان این‌طور کوتاهتر کرد: عدد a را به‌جای $a - b$ با باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر b عوض کنید. این الگوریتم «بهبودیافته» را با استفاده از دو عددی که در آغاز این بخش ذکر کردیم توضیح می‌دهیم:

$$\begin{aligned}(۱۳۸۱۹۵۵, ۶۹۰۷۱۳) &= (۶۹۰۷۱۳, ۵۲۹)\\ &= (۵۲۹, ۳۶۸)\\ &= (۳۶۸, ۱۶۱)\\ &= (۱۶۱, ۴۶)\\ &= (۴۶, ۲۳)\\ &= (۲۳, ۰)\\ &= ۲۳\end{aligned}$$

همان‌طور که می‌بینید با این روش خیلی سریعتر به نتیجه می‌رسیم.

مسألهٔ ۵۴. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای $۲n + ۱۳$ و $n + ۷$ را پیدا کنید.

راه‌حل. می‌توان نوشت

$$(۲n + ۱۳, n + ۷) = (n + ۷, n + ۶) = (n + ۶, ۱) = ۱$$

مسألهٔ ۵۵. ثابت کنید عددی طبیعی مانند n وجود ندارد که بتوان کسر $\frac{۱۲n+۱}{۳۰n+۲}$ را ساده کرد.

مسألهٔ ۵۶. مقدار $(۲^{۱۰۰}-۱, ۲^{۱۲۰}-۱)$ را پیدا کنید.

مسألهٔ ۵۷. مقدار $(۱۱۱\cdots۱۱۱, ۱۱\cdots۱۱)$ را پیدا کنید که در آن صد تا ۱ در نمایش اعشاری عدد اول و شصت تا ۱ در نمایش اعشاری عدد دوم آمده است.

توصیه به معلمان. با وجود اینکه الگوریتم اقلیدسی ممکن است ساده به نظر برسد یکی از ابزارهای بسیار مهم حساب است (که می‌توان از آن مثلاً برای اثبات قضیهٔ اساسی حساب استفاده کرد). بنابراین فکر می‌کنیم بسیار بجا باشد که جلسه‌ای جداگانه به این روش فوق‌العاده (همراه با بحثی دربارهٔ ب.م.م.، ک.م.م. و ویژگیهایشان) اختصاص یابد.

فصل ۴

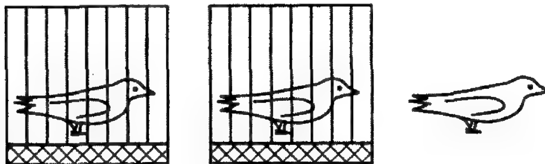
اصل لانه‌کبوتری

۱. مقدمه

دانش‌آموزانی که پیش از این هیچ‌وقت چیزی دربارهٔ اصل لانه‌کبوتری نشنیده‌اند ممکن است تصور کنند که این اصل یک جور شوخی است:

اگر $N + 1$ یا تعدادی بیشتر کبوتر را در N لانه قرار دهیم، آن‌وقت لانه‌ای باید شامل دو یا تعدادی بیشتر کبوتر باشد.

به ابهام موجود در عبارت «لانه‌ای باید شامل ...»، «دو یا تعدادی بیشتر ...» توجه کنید. این موضوع در حقیقت وجه تمایز اصل لانه‌کبوتری است که به کمک آن می‌توانیم به نتیجه‌گیریهایی کاملاً دور از انتظار برسیم، حتی مواقعی که به نظر می‌رسد اطلاعاتمان کافی نباشد. (شکل ۱۶ را ببینید.)



شکل ۱۶

اثبات این اصل کاملاً ساده است و در آن فقط از شمارش معمولی کبوترها در لانه‌هایشان استفاده می‌شود. فرض کنید در هیچ یک از لانه‌ها بیش از یک کبوتر نباشد. در این صورت روی هم بیش از N کبوتر وجود ندارد، و این نتیجه با این فرض که تعداد کبوترها $N + 1$ است تناقض دارد. بنابراین اصل لانه‌کبوتری با استفاده از روش اثبات با رسیدن به تناقض، که باید بر آن مسلط باشید، ثابت می‌شود.

ممکن است بپرسید که مسألهٔ زیر چه ربطی به کبوترها دارد؟

مسألهٔ ۱. کیسه‌ای شامل مهره‌هایی به دو رنگ سیاه و سفید است. کمترین تعداد مهره‌هایی که باید بدون نگاه کردن از این کیسه بیرون بیاوریم تا مطمئن باشیم در میان آنها حتماً دو مهرهٔ همرنگ وجود دارد چند تاست؟

به‌نظر می‌رسد که مسألهٔ زیر هم ربطی به کبوترها و لانه‌ها نداشته باشد:

مسألهٔ ۲. یک میلیون درخت کاج در جنگلی روییده‌اند. می‌دانیم که روی هیچ درخت کاجی بیش از ۶۰۰۰۰۰ برگ وجود ندارد. ثابت کنید در این جنگل دو درخت کاج تعداد برگهایشان یکی است.

راه‌حل مسألهٔ ۱. می‌توانیم سه مهره از کیسه بیرون بیاوریم. اگر در میان آنها از هر رنگ بیش از یک مهره وجود نداشته باشد، آن‌وقت روی‌هم بیش از دو مهره بیرون نیاورده‌ایم. این نتیجه‌گیری واضح است و با اینکه سه مهره از کیسه بیرون آورده‌ایم تناقض دارد. از طرف دیگر، روشن است که بیرون آوردن دو مهره کافی نیست. در اینجا مهره‌ها نقش کبوترها را دارند و رنگها (سیاه و سفید) نقش لانه‌ها را.

راه‌حل مسألهٔ ۲. یک میلیون «کبوتر» (درخت کاج) وجود دارد و متأسفانه ۶۰۰۰۰۱ لانه که از ۰ تا ۶۰۰۰۰۰ شماره‌گذاری شده‌اند. هر «کبوتر» (درخت کاج) را در لانه‌ای قرار می‌دهیم که شماره‌اش تعداد برگهای آن درخت است. چون «کبوترها» بیشتر از لانه‌ها هستند، در لانه‌ای باید دست‌کم دو «کبوتر» (درخت کاج) باشد: اگر در هیچ لانه‌ای بیش از یکی نباشد، آن‌وقت بیش از ۶۰۰۰۰۱ «کبوتر» وجود ندارد. اما اینکه دو «کبوتر» در یک لانه باشند، معنایش این است که تعداد برگهایشان یکی است.

توجه کنید که صورتهای این مسأله‌ها هم همان ابهام اصل لانه‌کبوتری را در خود دارند. درست همین‌جور مسأله‌ها هستند که می‌توان در بیشتر موارد آنها را با استفاده از اصل لانه‌کبوتری حل کرد.

توصیه به معلمان. دانش‌آموزان در مواجهه با این ابهام دچار مشکل می‌شوند. آنها ابتدا باید چند تمرین ساده مانند مسأله‌های ۱ و ۲ حل کنند. بعضی وقتها حتی فراموش می‌کنند که چه چیزی را باید ثابت کنند. ممکن است لازم باشد که تفاوت میان درکی شهودی و اثباتی واقعی را برایشان روشن کنید.

در بررسی چند مسألهٔ اول مهم است که روی ایده‌های مشترک، بی‌آنکه اصلاً به‌طور آگاهانه به هیچ اصل کلی‌ای استناد شود، تأکید شود. این ایده‌ها آن‌طور که انتظار می‌رود برای دانش‌آموزان واضح نیستند. به‌دنبال آن می‌توان مجموعه‌ای از مسأله‌ها را برای تقلید آگاهانهٔ استدلالهایی که معلم آنها را درست همان موقع ارائه کرده است، آورد (مسأله‌های ۳ تا ۷). آخر سر می‌توانیم به دانش‌آموزان مستقیماً از اصل لانه کبوتری بگوییم و تأکید کنیم که این اصل واقعاً اساس راه‌حل مسأله‌های قبلی بوده است. از این مرحله به بعد در تحلیل مسأله‌ها می‌توانیم بعضی از راه‌حلها را به‌طور مفصل، بدون حتی هیچ

ذکری از عبارت «اصل لانه‌کبوتری»، بیاوریم تا دانش‌آموزان وادار شوند که وضعیت موجود را مجدداً بررسی کنند.

مسألهٔ ۳. دوازده عدد صحیح داده شده‌اند. ثابت کنید می‌توان دو تا از آنها را انتخاب کرد که تفاضلشان بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۴. شهر لنینگراد پنج میلیون نفر سکنه دارد. اگر بدانیم هیچ شخصی بیش از یک میلیون تار مو روی سرش نیست، ثابت کنید که دو نفر از ساکنان لنینگراد تعداد موهای سرشان یکی است.

مسألهٔ ۵. بیست و پنج جعبه سیب به فروشگاهی تحویل داده شده‌اند. این سیبها سه نوع مختلف‌اند و همهٔ سیبهای هر یک از جعبه‌ها یک نوع‌اند. ثابت کنید از میان این جعبه‌ها دست‌کم نه تایشان شامل یک نوع سیب‌اند.

۲. تعمیمهای اصل لانه‌کبوتری

اگر مسأله‌های بالا را با دقت خوانده باشید و سعی کرده باشید که مسألهٔ ۵ را از همان راه دو تای اول حل کنید، احتمالاً در این کار ناکام مانده‌اید. از اصل لانه کبوتری سوای هر چیز دیگر فقط می‌توانید نتیجه بگیرید که دو جعبه وجود دارد که سیبهایشان از یک نوع‌اند. برای حل این مسأله می‌توانیم از «اصل لانه‌کبوتری تعمیم یافته» استفاده کنیم:

اگر $Nk + ۱$ یا تعدادی بیشتر کبوتر را در N لانه قرار دهیم، آن‌وقت لانه‌ای باید شامل دست‌کم $k + ۱$ کبوتر باشد.

در حالتی که $k = ۱$، اصل لانه‌کبوتری تعمیم یافته به اصل لانه‌کبوتری ساده تبدیل می‌شود. اثبات اصل تعمیم‌یافته را به‌عنوان تمرین به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

راه‌حل مسألهٔ ۵. این ۲۵ «کبوتر» (جعبه) را در ۳ «لانه» (انواع سیبها) قرار می‌دهیم. چون $۲۵ = ۳ \times ۸ + ۱$، می‌توانیم از اصل لانه‌کبوتری تعمیم یافته، در حالتی که $N = ۳$ و $k = ۸$، استفاده کنیم. در این صورت نتیجه می‌شود که «لانه»ای باید شامل دست‌کم ۹ جعبه باشد.

در تحلیل این راه‌حل آموزنده است که آن را از نو بدون استفاده از هیچ شکلی از اصل لانه‌کبوتری و فقط با استفاده از استدلال شمارشی معمولی (از همان نوعی که اصل لانه کبوتری را ثابت کردیم) بیان کنید.

برای حل کردن بیشتر مسأله‌های زیر استفاده از اصل لانه‌کبوتری تعمیم یافته لازم است.

مسألهٔ ۶. درکشورکورلند M تیم فوتبال وجود دارد که هرکدامشان ۱۱ بازیکن دارد. همهٔ این بازیکنان برای سفر به کشوری دیگر برای برگزاری مسابقه‌ای مهم در فرودگاهی جمع می‌شوند اما باید در «لیست

انتظار» معطل بمانند. ۱۰ پرواز به مقصد موردنظر آنها وجود دارد و معلوم شده است که در هر پرواز برای درست M بازیکن جا هست. یک بازیکن به‌جای سفر با هواپیما آن هم با معطلی در لیست انتظار با بالگرد شخصی‌اش خود را به مسابقه خواهد رساند. ثابت کنید که دست‌کم یک تیم کامل مطمئن خواهد بود که خود را به این مسابقهٔ مهم می‌رساند.

مسألهٔ ۷. ۸ عدد طبیعی متمایز که هیچ‌کدامشان از ۱۵ بزرگتر نیست مفروض‌اند. ثابت کنید تفاضل مثبت دست‌کم سه جفت از آنها یکی است. (لازم است این جفتها به‌عنوان مجموعه جدا از هم باشند.)

هنگام حل کردن مسألهٔ ۷ با مانعی ظاهراً غیرقابل عبور مواجه می‌شویم. در اینجا ۱۴ تفاضل ممکن میان ۸ عدد داده شده وجود دارد (مقدارهای این تفاضلها عددهای از ۱ تا ۱۴اند.) اینها ۱۴ لانهٔ موردنظرند. اما کبوترهایمان کدام‌اند؟ آنها هم باید تفاضلهای میان جفتهای عددهای داده شده باشند. به‌هر حال ۲۸ جفت عدد وجود دارد و می‌توانیم آنها را در ۱۴ لانه‌مان طوری جا دهیم که در هر لانه دقیقاً دو «کبوتر» وجود داشته باشد (و بنابراین هیچ لانه‌ای شامل سه کبوتر نباشد). در اینجا باید به نکته‌ای دیگر هم توجه کنیم. نمی‌توانیم بیش از یک کبوتر در لانهٔ شمارهٔ ۱۴ قرار دهیم، چون عدد ۱۴ را فقط به یک طریق می‌توان به شکل تفاضل دو عدد طبیعی کوچکتر از ۱۵ یا برابر با آن نوشت: $۱۴ = ۱۵ - ۱$. یعنی اینکه ۱۳ لانهٔ باقی‌مانده شامل دست‌کم ۲۷ کبوترند و از اصل لانه‌کبوتری تعمیم یافته نتیجهٔ موردنظرمان به‌دست می‌آید.

* * *

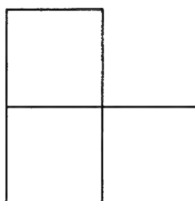
چهار مسألهٔ بعدی را می‌توان با استفاده از اصل لانه‌کبوتری (معمولی یا تعمیم‌یافته) و بررسیهای دیگر حل کرد.

مسألهٔ ۸. ثابت کنید در هر گروه پنج نفری دو نفر هستند که تعداد دوستانشان در این گروه یکی است.

مسألهٔ ۹. چند تیم فوتبال در یک دورهٔ مسابقات شرکت کرده‌اند که در آن هر تیم با هر تیم دیگر دقیقاً یک بار بازی می‌کند؟ ثابت کنید در هر لحظه از این دوره مسابقات دو تیم هستند که تا آن لحظه یک تعداد مسابقه برگزار کرده‌اند.

مسألهٔ ۱۰. الف) حداکثر چند تا از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ را می‌توان سبز کرد، به‌شرطی که در هر آرایشی از سه خانه مانند شکل ۱۷ (که آن را «سه‌مربعی» می‌نامند)، دست‌کم یک خانه سبز نباشد؟ (سه‌مربعیها ممکن است عین همین شکل در صفحهٔ شطرنج دیده شوند یا اینکه دوران یافتهٔ این شکل به‌اندازهٔ مضربی از ۹۰° باشند.)

ب) دست‌کم چند تا از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی ۸×۸ را می‌توان سبز کرد، به‌شرطی که در هر سه‌مربعی عین شکل ۱۷ (با شرط قسمت (الف)) دست‌کم یک خانه سبز باشد؟



شکل ۱۷

راهنمایی مسألهٔ ۱۰ (الف): صفحهٔ شطرنج موردنظر را به شانزده مربع 2×2 تقسیم کنید. این مربعهای کوچک لانه‌ها هستند و خانه‌های سبز، کبوترها.

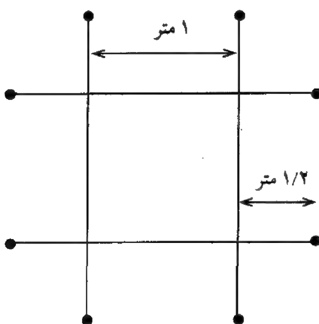
هنگام حل کردن مسأله‌های پیچیده‌تر (مثلاً از مسألهٔ ۱۰ به بعد) بسیار مفید است که فرایندهای تشخیص کبوترها و لانه‌ها، وارد کردن ملاحظات کمکی در استدلال، و به کار بردن خود اصل لانه‌کبوتری، کاملاً از هم تفکیک شوند. در اینجا یکی از هدفهای مهم پرورش این مهارت است که از صورت مسأله‌ای بتوان تشخیص داد که چه وقت می‌توان اصل لانه‌کبوتری را در راه‌حل آن به‌کار برد.

مسألهٔ ۱۱. ده دانش‌آموز کلاً ۳۵ مسألهٔ یک المپیاد ریاضی را حل کرده‌اند. هر یک از مسأله‌ها را دقیقاً یک دانش‌آموز حل کرده است. دست‌کم یک دانش‌آموز دقیقاً یک مسأله را حل کرده است؛ به همین ترتیب دست‌کم یکی از آنها دقیقاً دو مسأله را حل کرده است و دست‌کم یکی دیگر هم دقیقاً سه مسأله را حل کرده است. ثابت کنید که دست‌کم یک دانش‌آموز هم وجود دارد که دست‌کم پنج مسأله را حل کرده است.

۳. کبوترها در هندسه

مسألهٔ ۱۲. حداکثر چند شاه را می‌توان روی صفحهٔ شطرنج طوری گذاشت که هیچ دوتایشان یکدیگر را تهدید نکنند؟

مسألهٔ ۱۳. حداکثر چند عنکبوت می‌توانند به‌طور مسالمت‌آمیز روی تار عنکبوت شکل زیر زندگی کنند؟



شکل ۱۸

هر عنکبوت فقط همسایگانی را تحمل می‌کند که فاصلهٔ آنها روی تار ۱٫۱ متر یا بیشتر باشد.

مسألهٔ ۱۴. ثابت کنید مثلث متساوی‌الاضلاع را نمی‌توان با دو مثلث متساوی‌الاضلاع کوچکتر به‌طور کامل پوشاند.

مسألهٔ ۱۵. پنجاه و یک نقطه درون مربعی به‌طول ضلع ۱ متر پراکنده‌اند. ثابت کنید که مجموعه‌ای از سه تا از این نقطه‌ها را می‌توان با مربعی به طول ضلع ۲۰ سانتیمتر پوشاند.

راه‌حل. اگر این مربع را به ۲۵ مربع کوچکتر به‌طول ضلع ۲۰ سانتیمتر تقسیم کنیم، از اصل لانه‌کبوتری تعمیم یافته نتیجه می‌شود که از این مربعها یکی شامل دست‌کم سه‌تا از این ۵۱ نقطهٔ پراکنده است.

خوانندهٔ دقیق حتماً متوجه ایرادی جزئی در این استدلال شده است. در همه جای بحثمان فرض می‌کردیم که لانه‌هایمان جدا از هم‌اند. یعنی ممکن نیست هیچ کبوتری در آنِ واحد در دو لانهٔ متمایز باشد. به هر حال مربعها، «لانه‌ها»، در این راه‌حل اندکی تداخل دارند: نقطه‌های روی ضلعهای مربعها را می‌توان متعلق به هر دو لانه دانست.

برای رفع این مشکل باید در مورد هر پاره‌خط که مرز یک مربع است انتخابی صورت گیرد، این‌طور که تصمیم بگیریم کدام یک از دو مربع مجاورش شامل نقطه‌های آن فرض شود. این کار را می‌توان مثلاً این‌طور انجام داد که نقطه‌های ضلعهای «شمالی» و «شرقی» هر مربع را کنار بگذاریم و نقطه‌های ضلعهای «جنوبی» و «غربی»شان را به حساب بیاوریم (به استثنای نقطه‌های روی ضلعهای مربع اصلی). با این اصلاح جزئی مجموعه‌ای از «لانه‌های واقعی» به‌دست می‌آید و اثبات مانند قبل ادامه می‌یابد.

۴. تعمیمی دیگر

اکنون توجه کنید که اثبات اصل لانه‌کبوتری بر اساس جمع کردن نابرابریها با هم است. نتیجه‌ای مهم از فرایند جمع کردن نابرابریها را که در بیشتر موارد می‌توان آن را با مضمون اصل لانه‌کبوتری تلفیق کرد، می‌شود این طور بیان کرد:

اگر مجموع n یا تعداد بیشتری عدد برابر با S شود، آن‌وقت در میان این عددها باید یک یا تعداد بیشتری عدد وجود داشته باشد که از $\frac{S}{n}$ بزرگتر نباشند و یک یا تعدادی بیشتر عدد هم باشند که از $\frac{S}{n}$ کوچکتر نباشند. می‌توانیم این حکم را هم مانند بیشتر شکلهای اصل لانه‌کبوتری به‌طور غیرمستقیم ثابت کنیم. مثلاً، اگر همهٔ عددهای موردنظر از $\frac{S}{n}$ بزرگتر باشند، آن‌وقت مجموعشان از S بزرگتر می‌شود که این با فرضمان تناقض دارد.

مسألهٔ ۱۶. پنج کارگر جوان روی هم ۱۵۰۰ روبل حقوق می‌گیرند. هر یک از آنها می‌خواهد یک ضبط‌صوت به قیمت ۳۲۰ روبل بخرد. ثابت کنید دست‌کم یکی از آنها باید برای خریدن ضبط‌صوت تا دریافت چک حقوق بعدی‌اش صبر کند.

راه‌حل. مجموع درآمدهای این کارگران، که آن را با S نشان می‌دهیم، ۱۵۰۰ روبل است؛ بنابراین، از اصلی که در بالا گفتیم نتیجه می‌شود که درآمد دست‌کم یکی از کارگران بیش از $\frac{۱۵۰۰}{۵}$ یا ۳۰۰ روبل نیست. این کارگر باید برای خرید ضبط‌صوتش صبر کند.

مسألهٔ ۱۷. در دستهٔ نظامی ۷ نفره‌ای مجموع سن اعضا ۳۳۲ سال است. ثابت کنید می‌توان سه عضو این دسته را طوری انتخاب کرد که مجموع سنشان از ۱۴۲ سال کمتر نباشد.

راه‌حل. همهٔ سه‌تاییهای ممکن از اعضای دسته را در نظر بگیرید. اگر سن سه عضو هر یک از این گروهها را با هم جمع کنیم و بعد مجموع عددهای حاصل را حساب کنیم، مجموع نهایی برابر با ۱۵ × ۳۳۲ می‌شود (چون هر نفر در ۱۵ تا سه‌تایی می‌آید). در عین حال، روی هم ۳۵ تا سه‌تایی وجود دارد. یعنی اینکه یک سه‌تایی از اعضای دسته وجود دارد که مجموع سن افرادش از عدد $\frac{۱۵ \times ۳۳۲}{۳۵}$، که از ۱۴۲ بزرگتر است، کمتر نیست.

مسألهٔ ۱۸. بیش از نیمی از سطح سیاره‌ای از منظومهٔ خورشیدی به‌نام تائوکتاس خشکی است. ثابت کنید که تائوکتانها می‌توانند تونلی حفر کنند که مستقیم از مرکز سیاره‌شان بگذرد و ابتدا و انتهایش در خشکی باشد (فرض کنید که دانش فنی آنها به‌قدر کافی پیشرفت کرده باشد).

۵. نظریهٔ اعداد

مسأله‌های بی‌نظیر بسیاری دربارهٔ ویژگیهای بخش‌پذیری عددهای صحیح را می‌توان با استفاده از اصل لانه‌کبوتری حل کرد.

مسألهٔ ۱۹. ثابت کنید تفاضل دو تا از توانهای ۲ مضربی از ۱۹۸۷ است.

مسألهٔ ۲۰. ثابت کنید در میان هر ۵۲ عدد صحیح همیشه می‌توان دو عدد طوری پیدا کرد که تفاضل مربعهایشان بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۲۱. ثابت کنید عددی صحیح وجود دارد که نمایش اعشاریش تماماً از رقمهای ۱ تشکیل شده و بر عدد ۱۹۸۷ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. ابتدا ۱۹۸۸ «کبوتر» به شماره‌های ۱، ۱۱، ۱۱۱، ...، ۱۱...۱۱۱ (۱۹۸۸ رقم ۱) در نظر بگیرید و آنها را در ۱۹۸۷ لانه به شماره‌های ۰، ۱، ۲، ...، ۱۹۸۶ جا دهید. هر عدد در لانه‌ای گذاشته می‌شود که شماره‌اش برابر با باقی‌ماندهٔ تقسیم آن عدد بر ۱۹۸۷ است. اکنون بنابر اصل لانه‌کبوتری اطمینان می‌یابیم که دو عدد وجود دارند که باقی‌ماندهٔ تقسیمشان بر ۱۹۸۷ یکی است. فرض کنید این عددها به‌ترتیب m تا ۱ و n تا ۱ داشته باشند و $m > n$. در این صورت تفاضلشان که برابر با

۰۰۰۰۰ ۱۱۰۰ ۰۰۰ ۱۱۱$((m-n)$ تا ۱ و n تا صفر) است بر عدد ۱۹۸۷ بخش‌پذیر است. چون نه ۲ عاملی از ۱۹۸۷ است و نه ۵، صفرهای طرف راست عدد بالا تأثیری در بخش‌پذیری بر ۱۹۸۷ ندارند و می‌توان همهٔ آنها را خط زد تا عددی به‌دست آید که همهٔ رقمهایش ۱ اند و بر ۱۹۸۷ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۲۲. ثابت کنید توانی از عدد ۳ وجود دارد که (در نمایش اعشاری) به رقمهای ۰۰۱ ختم می‌شود.

مسألهٔ ۲۳. هر یک از خانه‌های جدولی ۳ × ۳ با یکی از عددهای ۱−، ۰ و ۱ پر شده است. ثابت کنید از میان هشت مجموع ممکن عددهای روی سطرها، ستونها و قطرها دوتایشان با هم برابرند.

مسألهٔ ۲۴. بیش از نیمی از ۱۰۰ نفری که دور میزی گرد نشسته‌اند مَردند. ثابت کنید دو مرد وجود دارند که در دو سر یک قطر میز روبه‌روی یکدیگر نشسته‌اند.

مسألهٔ ۲۵. پانزده پسر ۱۰۰ عدد گردو جمع کرده‌اند. ثابت کنید دو تا از این پسرها یک تعداد گردو جمع کرده‌اند.

مسألهٔ ۲۶. رقمهای ۱، ۲، . . .، ۹ به سه گروه تقسیم شده‌اند. ثابت کنید حاصل‌ضرب عددهای یکی از این گروهها باید از ۷۱ بیشتر باشد.

مسألهٔ ۲۷. خانه‌های جدولی ۱۰ × ۱۰ را با عددهای صحیح طوری پر کرده‌ایم که هیچ دو عدد صحیح مجاوری تفاضلشان از ۵ بیشتر نباشد. (دو عدد صحیح در صورتی مجاورند که خانه‌هایشان در یک ضلع مشترک باشند.) ثابت کنید دو تا از این عددهای صحیح با هم برابرند.

مسألهٔ ۲۸. ثابت کنید در میان هر شش نفر یا سه نفر وجود دارند که هر یک از آنها دو نفر دیگر را می‌شناسد و یا سه نفر وجود دارند که هیچ‌یک از آنها دو نفر دیگر را نمی‌شناسد.

مسألهٔ ۲۹. پنج نقطهٔ مشبکه‌ای روی مشبکهٔ مربعی نامحدودی انتخاب شده‌اند. ثابت کنید وسط یکی از پاره‌خطهایی که دو تا از این نقطه‌ها را به هم وصل می‌کند هم نقطه‌ای مشبکه‌ای است.

مسألهٔ ۳۰. در انباری از هر یک از شماره‌های ۴۱، ۴۲ و ۴۳، ۲۰۰ لنگه پوتین وجود دارد. از این ۶۰۰ لنگه پوتین، ۳۰۰ تا لنگهٔ چپ‌اند و ۳۰۰ تا لنگهٔ راست. ثابت کنید می‌توان در میان این لنگه پوتینها دست‌کم ۱۰۰ جفت پوتین قابل استفاده پیدا کرد.

مسألهٔ ۳۱. الفبای یک زبان شامل ۲۲ حرف بی‌صدا و ۱۱ حرف صدادار است. هر رشته از این حروف به‌شرطی کلمه‌ای از این زبان است که در آن هیچ دو حرف بی‌صدایی کنار هم نباشند و هیچ حرفی هم دو بار به‌کار نرفته باشد. این الفبا به ۶ زیرمجموعهٔ (ناتهی) تقسیم می‌شود. ثابت کنید که حروف دست‌کم یکی از این گروهها چنان‌اند که می‌توان با آنها کلمه‌ای از این زبان را ساخت.

مسألهٔ ۳۲. ثابت کنید که می‌توانیم زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ای از ده عدد صحیح داده شده را طوری انتخاب کنیم که مجموع عضوهایش بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۳۳. ۱۱ عدد طبیعی متمایز که هیچ‌یک از آنها از ۲۰ بزرگتر نیست داده شده‌اند. ثابت کنید که می‌توان دو تا از این عددها را طوری انتخاب کرد که یکی از آنها دیگری را بشمارد.

مسألهٔ ۳۴. یازده دانش‌آموز در اردویی تابستانی پنج گروه پژوهشی تشکیل داده‌اند. ثابت کنید که می‌توان دو دانش‌آموز، مانند A و B، طوری پیدا کرد که هر گروه پژوهشی که شامل دانش‌آموز A باشد شامل دانش‌آموز B هم باشد.

دانش‌آموزان باید به‌خاطر داشته باشند حتی در صورتی که نتوانند فوراً از پس حل مسأله‌ای بر بیایند همیشه به صلاحشان است که بعداً به آن بازگردند و ایده‌هایی تازه را امتحان کنند. به فصل راه‌حلها نپرید! و دست‌آخر، فراموش نکنید که بعضی از مسأله‌ها ممکن است راه‌حلهای دیگری داشته باشند که در آنها از اصل لانه کبوتری استفاده نمی‌شود.

فصل ۵

گرافها ـ ۱

مفاهیمی که در این فصل به آنها می‌پردازیم در حل بسیاری از انواع مسأله‌هایی که در بیشتر موارد از نظر ظاهری اصلاً به هم شباهت ندارند به غایت مفیدند. گرافها هم از این نظر مهم‌اند و هم جذابیتهای خاص خودشان را دارند. بخشی از ریاضیات به‌نام نظریهٔ گراف به مطالعهٔ این مبحث اختصاص یافته است. در اینجا برای اینکه نشان دهیم چطور از گرافها در حل مسأله‌ها استفاده می‌شود چندتا از ایده‌های اولیهٔ این نظریه را بررسی می‌کنیم.

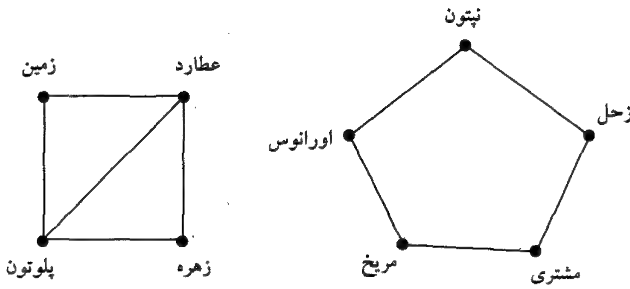
۱. مفهوم گراف

مسألهٔ ۱. میان نه سیارهٔ منظومهٔ خورشیدی ارتباطهای فضایی برقرار شده است. موشکها در این مسیرها حرکت می‌کنند: زمین ـ عطارد، پلوتون ـ زهره، زمین ـ پلوتون، پلوتون ـ عطارد، عطارد ـ زهره، اورانوس ـ نپتون، نپتون ـ زحل، زحل ـ مشتری، مشتری ـ مریخ و مریخ ـ اورانوس. آیا مسافری می‌تواند از زمین به مریخ برود؟

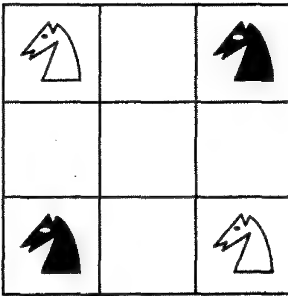
راه‌حل. می‌توانیم نموداری بکشیم و در آن سیاره‌ها را با نقطه‌ها و مسیرهای ارتباطی میان آنها را با پاره‌خطهای غیرمتقاطع نشان دهیم (شکل ۱۹ را ببینید.) از روی این نمودار روشن است که نمی‌توان از زمین به مریخ رفت.

مسألهٔ ۲. چند اسب روی صفحهٔ شطرنجی ۳ × ۳ مانند شکل ۲۰ گذاشته شده‌اند. آیا می‌توان هریک از آنها را با استفاده از حداکثر یک حرکت عادی اسب در شطرنج طوری جابه‌جا کرد که وضعیت شکل ۲۱ به‌دست آید؟

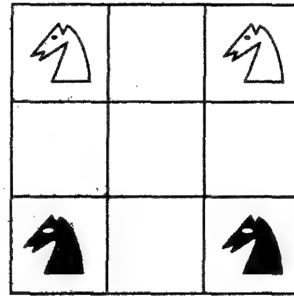
راه‌حل. پاسخ منفی است. برای اثبات این ادعا ابتدا خانه‌های صفحهٔ شطرنج موردنظر را با عددهای ۱، ۲، ۳، . . .، ۹ مانند شکل ۲۲، شماره‌گذاری می‌کنیم. در این صورت می‌توانیم هر خانه را با یک نقطه



شکل ۱۹



شکل ۲۱



شکل ۲۰

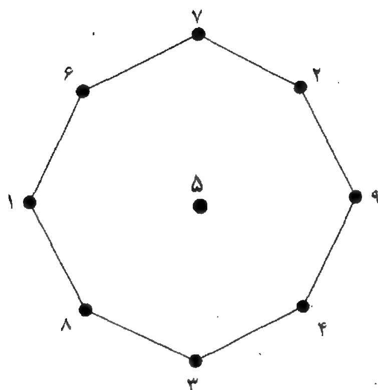
۱	۴	۷
۲	۵	۸
۳	۶	۹

شکل ۲۲

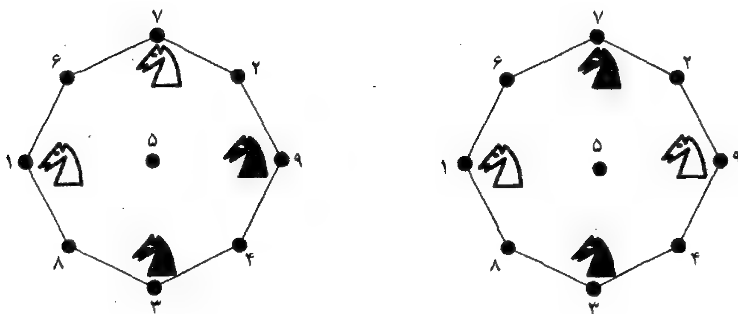
نمایش دهیم. اگر بتوانیم با یک حرکت اسب از یک خانه به خانه‌ای دیگر برویم، نقطه‌های متناظر این خانه‌ها را با یک پاره‌خط به‌هم وصل می‌کنیم (شکل۲۳). وضعیت اسبها در ابتدا و در انتها در شکل ۲۴ نشان داده شده است.

روشن است که ترتیب اسبها روی دایره را نمی‌توان تغییر داد. بنابراین نمی‌توان وضعیت اسبها را به شکل موردنظر درآورد.

راه‌حلهای این دو مسأله که ظاهرشان اصلاً به‌هم شباهت ندارد در ایده‌ای اساسی مشترک‌اند: نمایش دادن داده‌های مسأله با یک نمودار. نمودارهای حاصل هم در چیزی مشترک‌اند؛ هر یک از آنها



شکل ۲۳



شکل ۲۴

شامل مجموعه‌ای از نقطه‌ها هستند که بعضی از آنها با پاره‌خط به‌هم وصل شده‌اند.

شکلی از این دست را گراف می‌نامند. همچنین نقطه‌های موردنظر را رأسهای گراف و پاره‌خطها را یالهای آن می‌نامند.

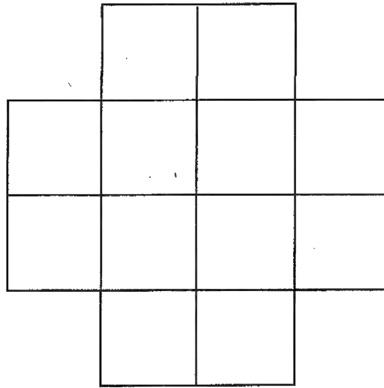
یادداشت. تعریفی که در اینجا برای گراف آورده‌ایم واقعاً زیادی محدودکننده است. مثلاً، در مسألهٔ ۲۰ در زیر، کاملاً طبیعی است که برای کشیدن یالهای گراف به‌جای پاره‌خط از کمان استفاده کنیم. با وجود این، آوردن تعریف دقیق در اینجا ممکن است زیادی پیچیده باشد. توصیف بالا برای اینکه دانش‌آموزان تصوری شهودی از گراف پیدا کنند کافی است. بعدها اگر خواستند می‌توانند این تعریف را اصلاح کنند.

* * *

در اینجا دو مسألهٔ دیگر آورده‌ایم که می‌توان آنها را هم با کشیدن گرافهایی حل کرد.

مسألهٔ ۳. صفحهٔ شطرنجی به‌شکل یک علامت بعلاوه از حذف کردن خانه‌های گوشه‌ای صفحهٔ

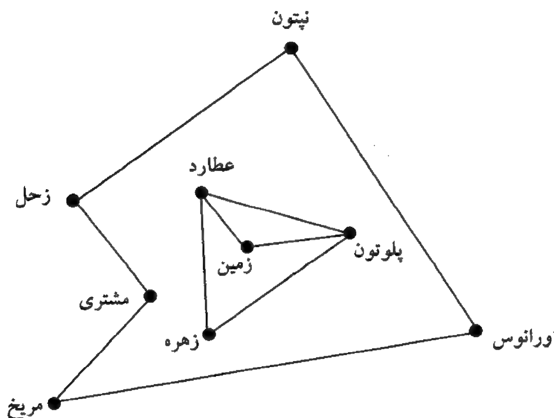
شطرنجی ۴ × ۴ به‌دست آمده است (شکل ۲۵ را ببینید). آیا ممکن است اسبی از هر یک از خانه‌های این صفحه دقیقاً یک بار بگذرد، سرتاسرش را طی کند و به‌همان خانه‌ای که از آن به‌راه افتاده بود بازگردد؟



شکل ۲۵

مسألهٔ ۴. کشور فیگورا نُه شهر به شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ دارد. مسافری متوجه می‌شود که میان هر دو تا از این شهرها وقتی و فقط وقتی خطی هوایی وجود دارد که عددی دو رقمی که از شماره‌های آنها ساخته می‌شود بر ۳ بخش‌پذیر باشد. آیا با این اوصاف این مسافر می‌تواند با هواپیما از شهر ۱ به شهر ۹ برود؟

توجه کنید که گراف را می‌توان به راههای مختلف نمایش داد. مثلاً گراف مسألهٔ ۱ را می‌توان مانند شکل ۲۶ هم نمایش داد.

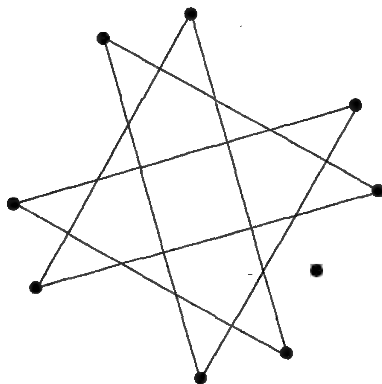


شکل ۲۶

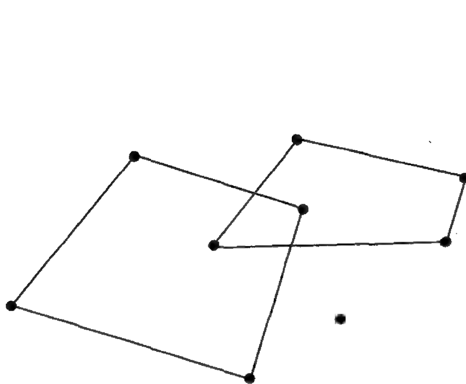
تنها موضوع مهم در مورد گراف این است که کدام رأسهایش به‌هم وصل‌اند و کدامها به‌هم وصل نیستند.

دو گراف را که کاملاً عین هم‌اند و تنها فرقشان احتمالاً این است که به‌طور متفاوتی رسم شده‌اند، یکریخت می‌نامند.

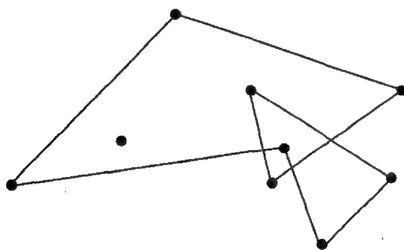
مسألهٔ ۵. سعی کنید در شکلهای ۲۷، ۲۸ و ۲۹ گرافی یکریخت با گراف مسألهٔ ۲ (شکل ۲۳ را ببینید) پیدا کنید.



شکل ۲۷



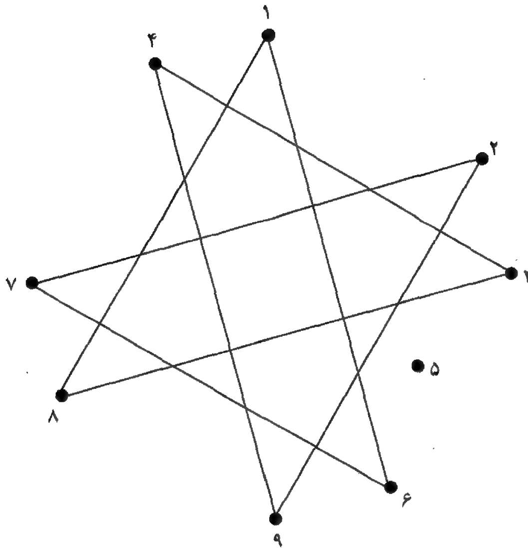
شکل ۲۸



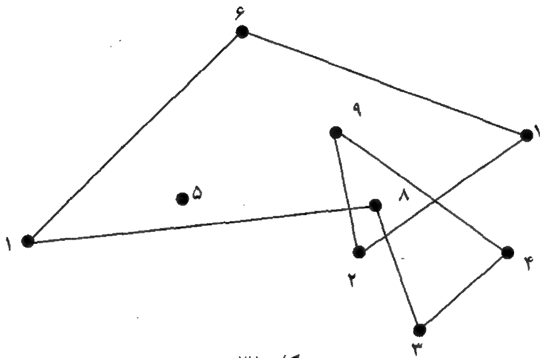
شکل ۲۹

راه‌حل. گرافهای اولی و سومی با هم یکریخت‌اند و اطمینان یافتن از اینکه این گرافها هر دو با گراف مسألهٔ ۲ یکریخت‌اند چندان دشوار نیست؛ فقط کافی است که رأسهایشان را از نو شماره‌گذاری کنیم (شکلهای ۳۰ و ۳۱ را ببینید). اثبات اینکه گرافهای شکلهای ۲۸ و ۲۳ یکریخت نیستند نسبتاً پیچیده‌تر است.

توصیه به معلمان. مفهوم گراف را باید فقط بعد از مطرح کردن چند مسأله مانند مسأله‌های ۱ و ۲ در بالا که مستلزم استفاده از گراف برای نمایش شرایط مسأله‌اند معرفی کرد. مهم است که دانش‌آموزان خیلی زود بفهمند که گراف را می‌توان به راههای مختلف کشید. برای روشن شدن ایدهٔ یکریختی دانش‌آموزان می‌توانند چند تمرین دیگر را شبیه آنهایی که در اینجا آوردیم حل کنند.



شکل ۳۰



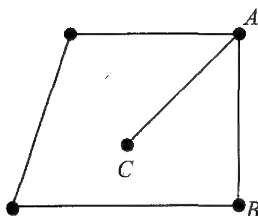
شکل ۳۱

۲. درجهٔ رأسها: شمارش یالها

در بخش قبلی گراف را مجموعه‌ای از نقطه‌ها (رأسها) تعریف کردیم که بعضی از آنها با پاره‌خطهایی (یالها) به‌هم وصل شده‌اند. تعداد یالهایی را که از رأسی خارج شده‌اند درجهٔ این رأس می‌نامند. به این ترتیب، مثلاً، در گراف شکل ۳۲ درجهٔ رأس A برابر با ۳، درجهٔ رأس B برابر با ۲ و درجهٔ رأس C برابر با ۱ است.

مسألهٔ ۶. در اسمالویل ۱۵ تلفن عمومی وجود دارد. آیا می‌توان این تلفنها را با سیم‌کشی طوری به هم وصل کرد که هر تلفن دقیقاً به پنج‌تای دیگر وصل باشد؟

راه‌حل. فرض کنید که چنین کاری ممکن باشد. گرافی را در نظر بگیرید که رأسهایش تلفنها باشند و



شکل ۳۲

یالهایش سیم‌کشیهای موردنظر. این گراف ۱۵ رأس دارد که درجهٔ هر یک از آنها ۵ است. اکنون تعداد یالهایش را می‌شماریم. برای این کار می‌توانیم درجه‌های همهٔ رأسها را با هم جمع کنیم. البته، در این مجموع هر یال دو بار شمرده شده است (هر یال دو رأس را به‌هم وصل می‌کند). بنابراین تعداد یالهای این گراف برابر با $\frac{۱۵ \times ۱۵}{۲}$ است. اما این عدد، عددی طبیعی نیست. پس چنین گرافی وجود ندارد، یعنی نمی‌توانیم تلفنهای موردنظر را آن‌طور که خواسته شده است به‌هم وصل کنیم.

در راه‌حل این مسأله نشان داده‌ایم که چطور می‌توان با دانستن درجهٔ هر رأس، یالهای گراف را شمرد: درجهٔ همهٔ رأسها را با هم جمع می‌کنیم و مجموع به‌دست آمده را بر ۲ تقسیم می‌کنیم.

مسألهٔ ۷. کشوری ۱۰۰ شهر دارد و از هر شهر چهار جاده به شهرهای دیگر می‌رود. این کشور روی هم چند جاده دارد؟

توجه کنید که از روشی که برای شمارش یالهای گراف بیان کردیم نتیجه می‌شود مجموع درجه‌های همهٔ رأسهای گراف عددی زوج است (در غیر این صورت نمی‌توانستیم آن را بر ۲ تقسیم کنیم تا تعداد یالها به‌دست آید). با استفاده از تعریفهای زیر می‌توانیم این نتیجه را بهتر صورتبندی کنیم:

هر رأس گراف را که درجه‌اش عددی فرد باشد رأسی‌فرد و هر رأس را که درجه‌اش عددی زوج باشد رأسی زوج می‌نامند.

قضیه: تعداد رأسهای فرد هر گراف عددی زوج است.

برای اثبات این قضیه کافی است توجه کنید که مجموع چند عدد صحیح وقتی و فقط وقتی عددی زوج است که تعداد جمعوندهای فردش عددی زوج باشد.

یادداشت. این قضیه در این فصل نقش اساسی دارد. مهم است که اثباتش همیشه در ذهنمان باشد و در حل مسأله‌ها بارها و بارها از آن استفاده کنیم. دانش‌آموزان را باید تشویق کرد تا به‌جای اینکه صرفاً صورت قضیه را بدانند اثبات آن را در راه‌حل مسأله‌هایشان تکرار کنند.

این قضیه اغلب برای اثبات وجود یالی از گراف، مانند مسألهٔ ۱۲، به‌کار می‌رود. همچنین می‌توان از این قضیه برای اثبات اینکه رسم گرافی که برخی ویژگیها را داشته باشد غیرممکن است استفاده کرد

(مسأله‌های ۸ تا ۱۱ را ببینید). ممکن است دست و پنجه نرم کردن با مسأله‌هایی از این دست برای دانش‌آموزان دشوار باشد. لازم است که ابتدا سعی کنند گراف خواسته شده را بکشند، بعد حدس بزنند که این کار ممکن نیست و آخر سر با استفاده از قضیهٔ بالا استدلالی قانع‌کننده یا اثباتی روشن بیاورند که گراف موردنظر وجود ندارد.

مسألهٔ ۸. کلاسی ۳۰ دانش‌آموز دارد. آیا ممکن است که ۹ تا از آنها هرکدام ۳ دوست، ۱۱ تا از آنها هرکدام ۴ دوست و ۱۰ تا از آنها هرکدام ۵ دوست (در این کلاس) داشته باشند؟

راه‌حل. اگر چنین چیزی ممکن باشد، می‌توانیم گرافی هم بکشیم که ۳۰ رأس (معرف دانش‌آموزان) داشته باشد که درجهٔ ۹ تا از آنها ۳، درجهٔ ۱۱ تا از آنها ۴ و درجهٔ ده‌تا از آنها ۵ باشد (رأسهایی را که با هم «دوست»اند با یال به‌هم وصل می‌کنیم). البته، چنین گرافی باید ۱۹ رأس فرد داشته باشد که با قضیهٔ بالا تناقض دارد.

مسألهٔ ۹. در اسمالویل ۱۵ تلفن عمومی وجود دارد. آیا می‌توان این تلفنها را طوری به هم وصل کرد که

الف) هر تلفن دقیقاً به ۷ تای دیگر وصل باشد؛

ب) ۴ تلفن وجود داشته باشد که هر یک به ۳تای دیگر وصل باشد، ۸ تلفن وجود داشته باشد که هر یک به ۶ تای دیگر وصل باشد و ۳ تلفن وجود داشته باشد که هر یک به ۵تای دیگر وصل باشد؟

مسألهٔ ۱۰. پادشاهی بر ۱۹ کشور سلطه دارد. آیا ممکن است که هر یک از این کشورها یا ۱ همسایهٔ تحت سلطه داشته باشد یا ۵ تا و یا ۹ تا؟

مسألهٔ ۱۱. آیا ممکن است درکشوری که از هر شهرش ۳ جاده به شهرهای دیگر می‌رود دقیقاً ۱۰۰ جاده وجود داشته باشد؟

مسألهٔ ۱۲. جان به‌هنگام بازگشت از دیسنی‌لند به خانه گفت که در آنجا دریاچه‌ای طلسم‌شده شامل ۷ جزیره دیده است که به هر یک از آنها یا ۱ پل منتهی می‌شده است یا ۳ پل یا ۵ پل. آیا درست است که دست‌کم یکی از این پلها باید به ساحل دریاچه منتهی شود؟

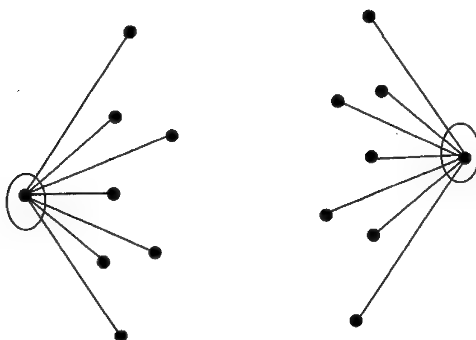
مسألهٔ ۱۳. ثابت کنید از ابتدای خلقت تاکنون تعداد افرادی که در طول حیاتشان تعدادی فرد بار با دیگران دست داده‌اند عددی زوج است.

مسألهٔ ۱۴. آیا ممکن است هر یک از ۹ پاره‌خطی که در صفحه رسم شده‌اند دقیقاً ۳ تای دیگر را قطع کند؟

۳. چند تعریف جدید

مسألهٔ ۱۵. کشور هفت ۱۵ شهر دارد که از هر یک از آنها به دست‌کم ۷ شهر دیگر جاده‌هایی مستقیم کشیده شده است. ثابت کنید می‌توان احیاناً از بعضی از شهرها گذشت و از هر شهر این کشور به هر شهر دیگرش رفت.

راه‌حل. دو شهر دلخواه این کشور را در نظر بگیرید و فرض کنید که هیچ مسیری میانشان وجود نداشته باشد. یعنی این‌که دنباله‌ای از جاده‌ها وجود ندارد که انتهای یکی ابتدای بعدی باشد و این دو شهر را به هم وصل کنند. از یک طرف می‌دانیم از هر یک از این دو شهر دست‌کم به ۷ شهر دیگر جاده‌هایی مستقیم وجود دارد. این ۱۴ شهر باید همگی متمایز باشد: اگر دو شهر دلخواه از آنها یکی باشند، آن‌وقت مسیری وجود دارد که از آنها (یا آن) می‌گذرد و این دو شهر را به‌هم وصل می‌کند (شکل ۳۳ را ببینید). بنابراین دست‌کم ۱۶ شهر متمایز در این کشور وجود دارد که این با فرض مسأله تناقض دارد.



شکل ۳۳

* * *

در اینجا دو تعریف مهم می‌آوریم که بی‌ربط به مسألهٔ قبل هم نیستند:

گراف را در صورتی همبند می‌نامند که هر دو رأسش را بتوان با مسیری (دنباله‌ای از یالها که هر یک از آنها از انتهای یال قبلی شروع می‌شود) به هم وصل کرد.

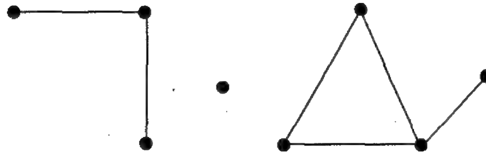
مسیر بسته (مسیری که رأسهای ابتدا و انتهایش یکی باشند) را دور می‌نامند.

اکنون می‌توانیم نتیجهٔ مسألهٔ قبلی را این‌طور صورتبندی کنیم: گراف جاده‌های کشور هفت همبند است.

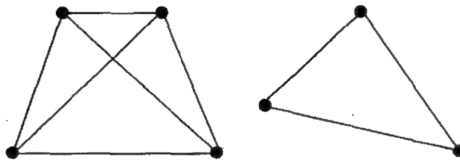
مسألهٔ ۱۶. ثابت کنید هر گراف n رأسی که درجهٔ هر یک از رأسهایش دست‌کم $\frac{n-۱}{۲}$ باشد همبند است.

طبیعی است که سؤال شود شکل گرافی ناهمبند چگونه است. گرافی از این دست از چند «تکه»

تشکیل می‌شود که در هر یک از آنها می‌توان از روی یالها از هر رأس به هر رأس دیگر رفت. به این ترتیب، مثلاً، گراف شکل ۳۴ از سه «تکه» تشکیل شده است در حالی که گراف شکل ۳۵ از دو تکه.



شکل ۳۴



شکل ۳۵

این «تکه‌ها» را مؤلفه‌های همبند گراف می‌نامند. بدیهی است که هر مؤلفهٔ همبند، گرافی همبند است. همچنین توجه کنید که هر گراف همبند فقط از یک مؤلفهٔ همبند تشکیل می‌شود.

مسألهٔ ۱۷. در سرزمین رؤیاها فقط یک جور وسیلهٔ نقلیه وجود دارد: قالی پرنده. بیست و یک خط قالیرانی از پایتخت به شهرهای دیگر وجود دارد. یک خط قالیرانی به فارویل پرواز می‌کند و از هر یک از بقیهٔ شهرها هم دقیقاً ۲۰ خط به شهرهای دیگر می‌رود. ثابت کنید که می‌توان با قالی پرنده از پایتخت به فارویل رفت (فقط ممکن است که لازم شود خط عوض کنیم).

راه‌حل. آن مؤلفهٔ همبند گراف خطهای قالیرانی را در نظر می‌گیریم که شامل پایتخت است. باید ثابت کنیم که این مؤلفه شامل فارویل هم است. فرض کنید این‌طور نباشد. در این صورت درجهٔ یک رأس این مؤلفه ۲۱ و درجهٔ بقیهٔ رأسهایش ۲۰ است. بنابراین، این مؤلفهٔ همبند دقیقاً یک رأس فرد دارد که این تناقض است.

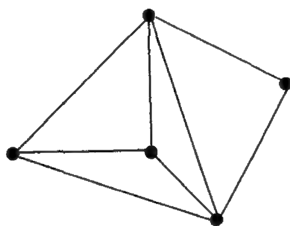
یادداشت. مفهوم همبندی در گرافها بی‌اندازه مهم است و مدام در مطالب بعدی در نظریهٔ گراف از آن استفاده می‌شود. ایدهٔ راه‌حل مسألهٔ ۱۷ ـ بررسی مؤلفه‌های همبند ـ ایده‌ای ارزشمند است و معلوم شده است که در بیشتر موارد در حل مسأله‌ها به‌کار می‌آید.

مسألهٔ ۱۸. در کشوری از هر شهر ۱۰۰ جاده به شهرهای دیگر می‌رود و می‌توان از راه این جاده‌ها از

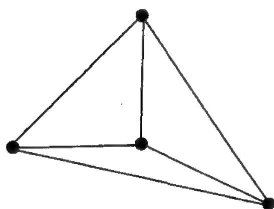
هر شهر به هر شهر دیگر رفت. یکی از جاده‌ها به‌علت تعمیرات بسته است. ثابت کنید با وجود این بازهم می‌توان از هر شهر به هر شهر دیگر رفت.

۴. گرافهای اویلری

مسألهٔ ۱۹. آیا می‌توان گراف
الف) شکل ۳۶؛
ب) شکل ۳۷،
را بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم کرد و در ضمن هر یال دقیقاً یک بار کشیده شود؟



شکل ۳۶



شکل ۳۷

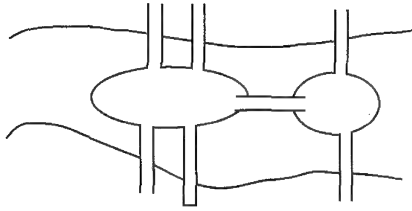
راه‌حل. الف) بله. یک راهش این است که از رأس منتهاالیه سمت چپ شروع به کشیدن کنیم و در نهایت به رأس مرکزی برسیم.
ب) خیر. در واقع اگر بتوانیم گراف موردنظر را آن‌طورکه در مسأله خواسته شده است بکشیم، آن‌وقت تعداد دفعاتی که به هر رأس وارد می‌شویم برابر با تعداد دفعاتی است که از آن خارج می‌شویم (به استثنای رأسهای ابتدایی و انتهایی). بنابراین درجهٔ هر یک از رأسها، به‌استثنای دوتا از آنها، باید عددی زوج باشد. اما در مورد گراف شکل ۳۷ این طور نیست.

هنگام حل کردن مسألهٔ ۱۹ در حقیقت این اصل کلی را ثابت کرده‌ایم:

گرافی که بتوان آن را بدون برداشتن مداد از روی کاغذ طوری رسم کرد که هر یال دقیقاً یک بار کشیده شود، بیش از دو رأس فرد ندارد.

این جور گرافها را نخستین بار لئونارد اویلر، ریاضیدان بزرگ سوئیسی، در سال ۱۷۳۶ در مورد مسأله‌ای معروف دربارهٔ پلهای کونیگسبرگ بررسی کرد (مسألهٔ ۱۲ را هم ببینید). گرافهایی را که می‌توان آنها را این‌طوری رسم کرد گرافهای اویلری می‌نامند.

مسألهٔ ۲۰. نقشهٔ شهر کونیگسبرگ در شکل ۳۸ نشان داده شده است. این شهر در دو کرانهٔ رودخانه‌ای قرار گرفته است و دو جزیره در رودخانهٔ موردنظر وجود دارد. هفت پل بخشهای مختلف شهر را به‌هم



شکل ۳۸

وصل می‌کنند. آیا می‌توان در این شهر گردش کرد و در ضمن از هر یک از پلها دقیقاً یک بار گذشت؟

مسألهٔ ۲۱. مجمع‌الجزایری با پلهایی طوری به هم وصل شده‌اند که می‌توان از هر جزیره به هر جزیرهٔ دیگر رفت. گردشگری به همهٔ جزیره‌ها می‌رود و در ضمن از هر یک از پلها دقیقاً یک بار می‌گذرد. او در این سیاحت سه بار به جزیرهٔ سه‌دفعه رفته است. چند پل به جزیرهٔ سه‌دفعه وجود دارد در صورتی که

الف) این گردشگر سیاحتش را نه از این جزیره آغاز کرده باشد و نه در آنجا به پایان برده باشد؛

ب) این گردشگر سیاحتش را از این جزیره آغاز کرده باشد ولی در آنجا به پایان نبرده باشد؛

ج) این گردشگر سیاحتش را از این جزیره آغاز کرده باشد و در همان‌جا به پایان برده باشد؟

مسألهٔ ۲۲. الف) طول تکه‌سیمی ۱۲۰ سانتیمتر است. آیا می‌توان با استفاده از آن (بدون بریدنش) اسکلت مکعبی را ساخت که طول هر یالش ۱۰ سانتیمتر باشد؟

ب) کمترین تعداد برشهای لازم در سیم برای اینکه بتوان اسکلت مکعب موردنظر را ساخت چقدر است؟

فصل ۶

نابرابری مثلث

۱. مقدمه

نابرابری مثلث را به‌راحتی می‌توان بیان کرد صرف‌نظر از اینکه دانش‌آموزان به‌طور رسمی با هندسه آشنایی داشته باشند یا نه. اما حتی برای آن دسته از دانش‌آموزانی که پیش از این اثباتهای اصل موضوعی یا رسمی هندسه را مطالعه کرده‌اند کاربردهایی غیربدیهی از این نابرابری وجود دارد که کاملاً ورای صورت ظاهری مسأله‌ها نهفته است. همچنین مسأله‌هایی شامل نابرابری مثلث می‌توان طرح کرد که حلشان تلاش فکری چشمگیری را بطلبد.

مضمون این نابرابری این است که در هر مثلث مانند ABC سه نابرابری زیر برقرار است

$$AB < AC + BC, \quad AC < BC + AB, \quad BC < AB + AC$$

یعنی طول هر ضلع مثلث از مجموع طولهای دو ضلع دیگرش کمتر است.

مسألهٔ ۱. ثابت کنید به‌ازای هر سه نقطه مانند A، B و C، $AC \geqslant |AB - BC|$.

هنگام بحث دربارهٔ این مسأله مهم است که تعبیر هندسیش هم گفته شود: طول هر ضلع مثلث از قدرمطلق تفاضل طولهای دو ضلع دیگر کمتر نیست.

مسألهٔ ۲. در مثلث ABC طول ضلعهای AC و AB به ترتیب ۳٫۸ و ۰٫۶ است. اگر طول ضلع BC عددی صحیح باشد مقدارش را پیدا کنید؟

مسألهٔ ۳. ثابت کنید طول هر ضلع مثلث از نصف محیطش بیشتر نیست.

مسألهٔ ۴. فاصلهٔ لنینگراد تا مسکو ۶۶۰ کیلومتر است. از لنینگراد تا شهر لیکووا ۳۱۰ کیلومتر، از لیکووا تا کلین ۲۰۰ کیلومتر و از کلین تا مسکو ۱۵۰ کیلومتر است. فاصلهٔ لیکووا از مسکو چقدر است؟

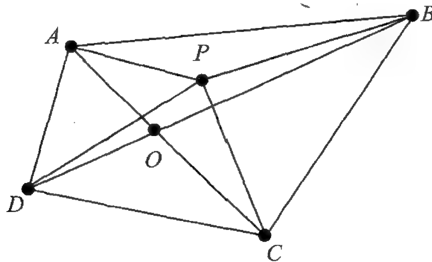
راهنمایی: توجه کنید که مجموع فاصله‌های لنینگراد از لیکووا، لیکووا از کلین و کلین از مسکو برابر با فاصلهٔ لنینگراد از مسکو است. یعنی اینکه این شهرها همگی روی یک خط راست قرار دارند.

توجه کنید که در راه‌حل مسألهٔ ۴ از این مطلب استفاده می‌کنیم که مجموع طولهای سه ضلع دلخواه هر چهارضلعی از طول ضلع چهارمش بزرگتر است. این مطلب را می‌توان به‌راحتی با استفاده از نابرابری مثلث ثابت کرد. در حقیقت، در هر چندضلعی مجموع طولهای همهٔ ضلعها، بجز یکی از آنها، از طول ضلع موردنظر بزرگتر است.

این مطلب را می‌توان برای بیشتر دانش‌آموزان در چند حالت ثابت کرد و بعد درستی آن را در همهٔ حالتها به‌طور شهودی پذیرفت. دانش‌آموزان پیشرفته‌تر می‌توانند با استفاده از استقرا اثباتی برایش بیاورند.

مسألهٔ ۵. درون چهارضلعی‌ای محدب نقطه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌هایش از رأسهای چهارضلعی کمترین مقدار ممکن باشد.

راه‌حل. چون چهارضلعی موردنظر محدب است قطرهایش در نقطه‌ای درونی مانند O یکدیگر را قطع می‌کنند. فرض کنید رأسهای چهارضلعی نقطه‌های A، B، C و D باشند (شکل ۳۹ را ببینید).



شکل ۳۹

در این صورت مجموع فاصله‌های نقطهٔ O از رأسها برابر با $AC + BD$ است. اما به‌ازای هر نقطهٔ دیگر مانند P (بنابر نابرابری مثلث)، $PA + PC > AC$ و به همین ترتیب $PB + PD \geqslant BD$. یعنی مجموع فاصله‌های نقطهٔ P از رأسهای چهارضلعی از $AC + BD$ کمتر نیست. روشن است که این مجموع فقط وقتی برابر با $AC + BD$ است که P و O یک نقطه باشند. بنابراین O همان نقطه‌ای است که دنبالش می‌گشتیم.

مسألهٔ ۶. نقطهٔ O در صفحهٔ مربع $ABCD$ داده شده است. ثابت کنید فاصلهٔ O از یکی از رأسهای این مربع از مجموع فاصله‌هایش از سه رأس دیگر بزرگتر نیست.

مسألهٔ ۷. ثابت کنید مجموع طول قطرهای هر چهارضلعی محدب از محیط آن کمتر است اما از نصف محیطش بیشتر است.

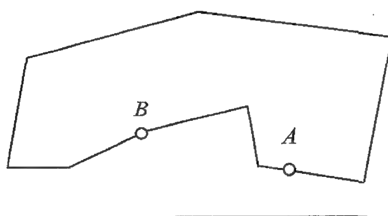
مسألهٔ ۸. ثابت کنید مجموع طول قطرهای هر پنج‌ضلعی محدب از محیط آن بزرگتر است اما از دوبرابر محیطش کمتر است.

مسألهٔ ۹. ثابت کنید فاصلهٔ دو نقطهٔ دلخواه درون هر مثلث از نصف محیط این مثلث بزرگتر نیست.

۲. نابرابری مثلث و تبدیلهای هندسی

اغلب مثلثی که باید در موردش نابرابری مثلث را به‌کار ببریم در شکل مسأله به چشم نمی‌خورد. در این موارد انتخاب مناسب تبدیلی هندسی ممکن است مفید باشد. در مجموعهٔ مسأله‌های زیر کاربرد تقارن به‌همراه نابرابری مثلث شرح داده شده است.

مسألهٔ ۱۰. قارچ‌جمع‌کنی در نقطه‌ای مشخص از جنگل خارج می‌شود. او باید خود را به بزرگراهی برساند که در امتداد خطی راست کشیده شده است و در نقطهٔ مشخص دیگری به جنگل بازگردد (شکل ۴۰). چطور می‌تواند این کار را از کوتاهترین مسیر ممکن انجام دهد؟



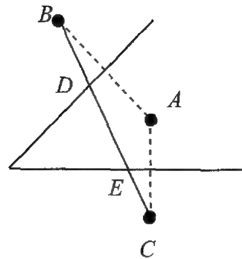
شکل ۴۰

مسألهٔ ۱۱. کلبهٔ یک نفر جنگلی درون شبه‌جزیره‌ای به شکل زاویه‌ای حاده است. این جنگلی باید از کلبه‌اش خارج شود، ابتدا به یک ساحل شبه‌جزیره و بعد به ساحل دیگرش برود و آخر سر به خانه‌اش بازگردد. چطور می‌تواند برای این کار کوتاهترین مسیر ممکن را انتخاب کند؟

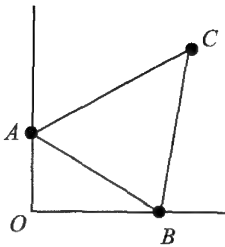
مسألهٔ ۱۲. A نقطه‌ای درون زاویه‌ای حاده است. قرینه‌های نقطهٔ A نسبت به دو ضلع این زاویه را پیدا می‌کنیم و آنها را B و C می‌نامیم. پاره‌خط BC ضلعهای این زاویه را در نقطه‌های D و E قطع می‌کند (شکل ۴۱ را ببینید). ثابت کنید $DE < \frac{BC}{۲}$.

مسألهٔ ۱۳. نقطهٔ C درون زاویه‌ای قائمه قرار دارد و نقطه‌های A و B روی ضلعهای این زاویه‌اند (شکل ۴۲ را ببینید). ثابت کنید محیط مثلث ABC از دو برابر طول OC کمتر نیست، که در اینجا O رأس زاویهٔ قائمهٔ موردنظر است.

اکنون مسألهٔ ۱۰ را حل می‌کنیم. فرض کنید این قارچ‌جمع‌کن در نقطهٔ A از جنگل خارج و در

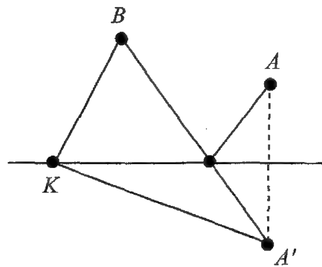


شکل ۴۱



شکل ۴۲

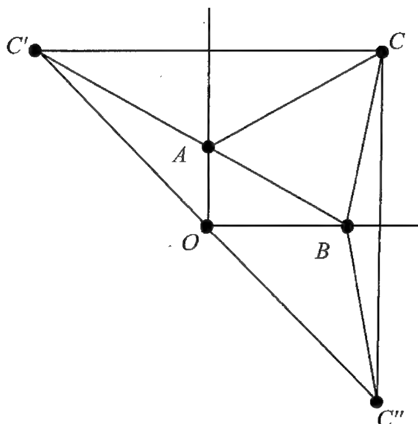
نقطهٔ B دوباره به آن وارد شود. قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به امتداد بزرگراه را پیدا می‌کنیم و آن را A' می‌نامیم (شکل ۴۳ را ببینید). اگر K نقطه‌ای باشد که این قارچ‌جمع‌کن در آنجا به بزرگراه می‌رسد، آن‌وقت طول مسیر AKB برابر با طول مسیر $A'KB$ است، زیرا $A'K$ چیزی نیست بجز قرینهٔ پاره‌خط AK نسبت به امتداد بزرگراه. اما ممکن نیست مسیر $A'KB$ از $A'B$ کوتاهتر باشد. پس نقطهٔ K باید نقطه‌ای باشد که $A'B$ بزرگراه را قطع می‌کند.



شکل ۴۳

به همین روش می‌توانیم مسأله‌های دیگر این مجموعه را هم حل کنیم. مثلاً، در مسألهٔ ۱۳ قرینه‌های نقطهٔ C نسبت به خطهای OA و OB را پیدا می‌کنیم و آنها را C' و C'' می‌نامیم (شکل ۴۴)؛ به آسانی می‌توان فهمید که نقطهٔ O روی خط راست $C'C''$ قرار دارد. توجه کنید که محیط مثلث ABC برابر با مجموع طولهای سه پاره‌خط $C'A$، AB و BC'' است. از نابرابری مثلث نتیجه می‌گیریم که مقدار این مجموع از طول $C'C''$ کمتر نیست. اما طول این پاره‌خط هم برابر با $2OC$ است، زیرا پاره‌خط $C'C''$ وتر مثلثی قائم‌الزاویه است که میانهٔ وارد بر وترش OC است. (دانش‌آموزانی که این قضیه را ندیده‌اند می‌توانند برای توجیه این حکم راه شهودیتری پیدا کنند: مثلاً به‌وسیلهٔ کشیدن مستطیلی که سه رأسش C'، C'' و Cاند.)

توصیه به معلمان. در اینجا مهم است که این مسأله‌ها با دقت حل شوند و دانش‌آموزان وادار شوند که شرحی منطقی از راه‌حل بیان کنند و فقط به توجیهی شهودی بسنده نکنند. ابتدا می‌توانیم به



شکل ۴۴

دانش‌آموزان یادآور شویم که تحت بازتاب نسبت به خط فاصله‌ها تغییر نمی‌کنند. بعد می‌توانیم ایدهٔ مشترک در این مسأله‌ها را به آنها نشان دهیم: تبدیل کردن مسیر موردنظر طوری که طولش تغییر نکند و در ضمن مسأله‌مان به مسألهٔ وصل کردن دو نقطه به هم از کوتاهترین مسیر ممکن تبدیل شود. مهم است بررسی شود که یکی از مسیرهای تبدیل‌یافته ممکن است واقعاً خطی راست شود و بنابراین جوابی بدیهی به‌دست آوریم؛ در غیر این صورت راه‌حل مسأله ممکن است بسیار دشوارتر باشد.

* * *

در بسیاری از مسأله‌ها یافتن کوتاهترین مسیر ممکن در مورد نوعی سطح در فضا مطرح می‌شود. در مسأله‌هایی از این دست نابرابری مثلث را فقط بعد از «گستراندن» سطح موردنظر روی یک صفحه می‌توان به‌کار برد. مسأله‌های زیر از این دسته‌اند:

مسألهٔ ۱۴. مگسی روی یک رأس مکعبی چوبی نشسته است. کوتاهترین مسیری که از آن می‌تواند به رأس روبه‌روی مکعب برود کدام است؟

مسألهٔ ۱۵. مگسی روی سطح بیرونی لیوانی استوانه‌ای شکل نشسته است. این مگس باید بدون پرواز کردن به نقطهٔ دیگری واقع در سطح درونی این لیوان برود. کوتاهترین مسیر ممکن برای او را پیدا کنید (از ضخامت لیوان چشم‌پوشی کنید).

۳. ترسیمهای افزوده شده

در بسیاری از موارد، اثبات نابرابریهای هندسی مستلزم افزودنِ بعضی شکلهاست. مسأله‌هایی از این دست غالباً پیچیده‌اند، زیرا انتخاب شکلی که مفید باشد تجربهٔ زیادی می‌خواهد. به کمک مجموعه مسأله‌های زیر تا حدودی چنین تجربه‌ای را کسب می‌کنید.

مسألهٔ ۱۶. ثابت کنید اگر نقطهٔ O درون مثلث ABC باشد،

$$AO + OC < AB + BC$$

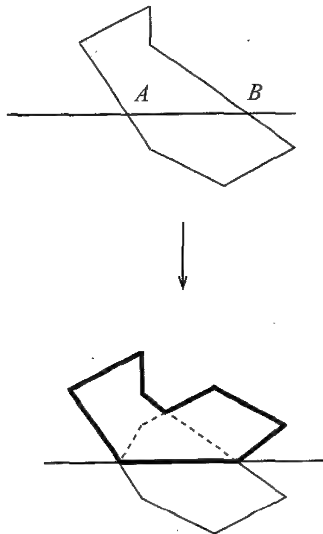
مسألهٔ ۱۷. ثابت کنید مجموع فاصله‌های نقطهٔ O از رأسهای مثلثی مفروض از محیط این مثلث کمتر است، به شرطی که نقطهٔ O درون مثلث قرار داشته باشد. اگر نقطهٔ O بیرون مثلث باشد، چطور می‌شود؟

مسألهٔ ۱۸. مسألهٔ ۱۱ را در حالتی حل کنید که شبه‌جزیرهٔ موردنظر به شکل زاویه‌ای منفرجه باشد.

مسألهٔ ۱۹. ثابت کنید در مثلث ABC طول میانهٔ AM از نصف مجموع طولهای ضلعهای AB و AC بزرگتر نیست. همچنین ثابت کنید مجموع طولهای سه میانه از محیط مثلث بزرگتر نیست.

۴. مسأله‌های گوناگون

مسألهٔ ۲۰. چندضلعی‌ای را از کاغذ درمی‌آوریم و بعد آن را در امتداد خطی راست تا می‌زنیم (شکل ۴۵ را ببینید). ثابت کنید محیط چندضلعی به‌دست آمده از محیط چندضلعی اولیه بزرگتر نیست.



شکل ۴۵

مسألهٔ ۲۱. ثابت کنید ممکن نیست چند ضلعی‌ای محدب سه ضلع داشته باشد که هر یک از آنها از بزرگترین قطر چندضلعی بزرگتر باشد.

مسألهٔ ۲۲. ثابت کنید محیط هر مثلث از $\frac{۴}{۳}$ مجموع طولهای میانه‌هایش بزرگتر نیست. (برای حل این مسأله باید بدانید که سه میانهٔ مثلث یکدیگر را به چه نسبتی تقسیم می‌کنند.)

مسألهٔ ۲۳. دو روستا در طرفین رودخانه‌ای که کرانه‌هایش خطهایی موازی‌اند قرار دارند. قرار است روی این رودخانه پلی عمود برکرانه‌هایش احداث شود. این پل کجا احداث شود تا مسیر میان این دو روستا تا جایی که ممکن است کوتاهتر باشد؟

مسألهٔ ۲۴. ثابت کنید هر پنج‌ضلعی محدب (یعنی پنج‌ضلعی‌ای که همهٔ قطرهای آن درونش قرار دارند) سه قطر دارد که می‌توان با آنها یک مثلث رسم کرد.

فصل ۷

بازیها

دانش‌آموزان بازی کردن را دوست دارند. صرف‌نظر از اینکه ریاضیاتی که در پس بازی موردنظر نهفته است ساده باشد یا پیچیده، امکان تعامل دوستانه و رقابت برنامه‌ریزی شده در آن، به برهم زدن یکنواختیهای کسالت‌آور دوران تحصیل کمک می‌کند.

در عین حال، این مسأله‌ها محتوایی غنی دارند و دانش‌آموزان با زحمت بسیار به راه‌حلشان می‌رسند. دشواریهای عمده در اینجا عبارت‌اند از اول بیان کردن استراتژی برد و دوم اثبات اینکه استراتژی در نظرگرفته شده همیشه به برد می‌انجامد. هنگام غلبه بر این دشواریها دانش‌آموزان چیزهای بیشتری دربارهٔ معیارهای پذیرفته شدهٔ استدلال ریاضی می‌آموزند و درک آنها از اینکه اصلاً حل کردن مسأله به چه معناست ارتقا می‌یابد.

دانش‌آموزان باید درک کنند که اظهاراتی به شکل: «اگر شما آن‌طور کنید، من این‌طور می‌کنم» در بیشتر موارد راه‌حل بازیها نیستند. نمونه‌هایی از راه‌حلهای درست را در متن آورده‌ایم.

توصیه می‌کنیم که در هر جلسهٔ کلاس بیش از یکی دو بازی این فصل را برای دانش‌آموزان مطرح نکنید، به استثنای بخش ۴ که شامل مسأله‌هایی است که «از آخر» تحلیل می‌شوند. ایدهٔ تقارن (بخش ۲) و مفهوم موقعیت برد (بخش ۳) را خود دانش‌آموزان هم می‌توانند مطالعه کنند. پس از اینکه از هر یک از این موضوعها دو یا سه مسأله بررسی شدند این کار را بهتر می‌توان انجام داد.

چندین نوع بازی در ریاضیات بررسی می‌شود، همین‌طور چندین نوع نظریهٔ بازی. در این فصل فقط به یک نوعشان می‌پردازیم. در هر یک از این بازیها دو بازیکن وجود دارد که نوبتی حرکتهایشان را انجام می‌دهند و هیچ بازیکنی نمی‌تواند در نوبتش از انجام حرکت امتناع کند. در اینجا مسأله‌مان همیشه یک چیز است: فهمیدن اینکه کدام بازیکن (اولی یا دومی) استراتژی برد دارد. این توضیحات را دیگر در مورد هر بازی تکرار نمی‌کنیم.

توجه کنید که مسأله‌های ستاره‌دار از بقیه دشوارترند.

۱. شبه‌بازیها: بازیهای سرکاری

نخستین دسته از بازیهایی که بررسی می‌کنیم سرکاری از آب در می‌آیند. نتیجه‌های این شبه‌بازیها به اینکه بازی چطور پیش برود بستگی ندارند. به همین دلیل راه‌حل چنین شبه‌بازیهایی شامل استراتژی برد نیستند، بلکه حاوی اثبات این مطلب‌اند که بازیکن اول یا بازیکن دوم در هر صورت بازی را می‌برد (بدون توجه به اینکه بازی چطور پیش برود!).

مسألهٔ ۱. دو تا بچه نوبتی شکلات مستطیل‌شکلی را که عرضش از ۶ مربع و طولش از ۸ مربع تشکیل شده است تکه‌تکه می‌کنند. این دو می‌توانند این شکلات را فقط از روی تقسیم‌بندیهای میان مربعهایش بشکنند. بچه‌ها همین‌طور به تقسیم‌کردن این تکه‌ها ادامه می‌دهند تا اینکه فقط مربعهای تکی بمانند. بازیکنی که دیگر نتواند تکه‌ای را تقسیم کند می‌بازد. چه‌کسی برنده می‌شود؟

راه‌حل. بعد از هر حرکت تعداد تکه‌ها یکی زیاد می‌شود. در ابتدا فقط یک تکه وجود دارد. در پایان بازی که دیگر انجام هیچ حرکتی ممکن نیست این شکلات به ۴۸ مربع کوچک تقسیم شده است. بنابراین باید ۴۷ حرکت انجام شده باشد که آخرین حرکت را هم مانند هر حرکت شمارهٔ فرد دیگر بازیکن اول انجام داده است. بنابراین بازی هر طوری هم که پیش برود بازیکن اول برنده می‌شود.

توصیه به معلمان. شبه‌بازیها این امکان را به دانش‌آموزان می‌دهند که خستگی در کنند و از فشار عصبی ناشی از حل مسأله‌ها یا بردن بازیها فارغ شوند. این‌جور بازیها به ویژه وقتی بسیار مؤثرند که مثلاً بلافاصله بعد از مطلبی فوق‌العاده دشوار یا در پایان یک جلسهٔ کلاس مطرح شوند. مهم است که به دانش‌آموزان اجازه دهید تا این بازیها را پیش از به‌دست آوردن راه‌حلشان عملاً در کلاس انجام دهند.

مسألهٔ ۲. سه دسته خرده‌سنگ داریم که شامل ۱۰، ۱۵ و ۲۰ تا خرده‌سنگ‌اند. در هر نوبت هر بازیکن می‌تواند یکی از این سه دسته را انتخاب و آن را به دو دستهٔ کوچکتر تقسیم کند. بازنده بازیکنی است که نتواند این کار را انجام دهد. چه کسی بازی را می‌برد و چطور؟

مسألهٔ ۳. عددهای ۱ تا ۲۰ در یک ردیف نوشته شده‌اند. دو بازیکن به نوبت میان این عددها علامتهای بعلاوه و منها می‌گذارند. وقتی همهٔ این علامتها گذاشته شدند، مقدار عبارت حاصل را حساب می‌کنیم (یعنی همهٔ جمعها و تفریقها را انجام می‌دهیم). اگر مجموع به‌دست آمده عددی زوج باشد بازیکن اول بازی را می‌برد و در غیر این‌صورت دومی برنده است. چه کسی بازی را می‌برد و چطور؟

مسألهٔ ۴. دو بازیکن به نوبت رخهایی را روی صفحهٔ شطرنج طوری می‌گذارند که یکدیگر را تهدید نکنند. بازنده بازیکنی است که نتواند دیگر رخی را روی صفحه بگذارد. چه کسی بازی را می‌برد؟

مسألهٔ ۵. ده تا ۱ و ده تا ۲ روی تخته‌سیاه نوشته شده‌اند. در هر نوبت بازیکن می‌تواند دو رقم دلخواه را پاک کند؛ اگر دو رقم پاک شده عین هم باشند به‌جای آنها یک رقم ۲ و اگر متمایز باشند به‌جای آنها یک رقم ۱ نوشته می‌شود. اگر رقمی که آخر سر می‌ماند ۱ باشد بازیکن اول و اگر این رقم ۲ باشد دومی برنده می‌شود. چه کسی بازی را می‌برد؟

مسألهٔ ۶*. عددهای ۲۵ و ۳۶ روی تخته‌سیاه نوشته شده‌اند. در هر نوبت بازیکن روی تخته‌سیاه تفاضل (مثبت) دو عدد روی تخته را می‌نویسد، البته به شرطی که این عدد قبلاً روی تخته نباشد. بازنده بازیکنی است که نتواند دیگر عددی روی تخته بنویسد. چه کسی بازی را می‌برد؟

مسألهٔ ۷. صفحهٔ شطرنجی به ابعاد

الف) ۱۰ × ۹؛

ب) ۱۲ × ۱۰؛

ج) ۱۱ × ۹،

داده شده است. در هر نوبت بازیکن می‌تواند یک سطر یا یک ستون را خط بزند به شرطی که در ابتدای حرکت دست‌کم یک خانه از آن سطر یا ستون خط نخورده باقی مانده باشد. بازیکنی که نتواند دیگر حرکتی انجام دهد می‌بازد. چه کسی بازی را می‌برد؟

۲. تقارن

مسألهٔ ۸. دو بازیکن به نوبت سکه‌های یک سنتی را روی میزی گرد می‌گذارند بی‌آنکه هیچ سکه‌ای روی دیگری قرار گیرد. بازیکنی که نتواند دیگر سکه‌ای روی میز بگذارد بازنده می‌شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟

راه‌حل. در این بازی میز هر چقدر هم که بزرگ باشد بازیکن اول می‌تواند بازی را ببرد! برای این کار، باید اولین سکه را طوری بگذارد که مرکزش بر مرکز میز واقع شود. بعد در ازای هر حرکت بازیکن دوم یک سکه را جایی بگذارد که قرینهٔ مکان سکهٔ بازیکن دوم نسبت به مرکز میز باشد. توجه کنید که با چنین استراتژیی موقعیتهای دو بازیکن بعد از هر حرکت بازیکن اول متقارن‌اند. پس نتیجه می‌شود که اگر بازیکن دوم بتواند حرکتی انجام دهد آن‌وقت در ازای آن بازیکن اول هم می‌تواند حرکتی انجام دهد و بنابراین بازی را می‌برد.

مسألهٔ ۹. دو بازیکن به نوبت فیلهایی را در خانه‌های صفحهٔ شطرنج طوری می‌گذارند که یکدیگر را تهدید نکنند (این فیلها را می‌توان در خانه‌هایی از هر رنگ گذاشت). بازیکنی که نتواند دیگر فیلی روی صفحه بگذارد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

راه‌حل. چون صفحهٔ شطرنج نسبت به مرکزش متقارن است طبیعی است که استراتژیی بر مبنای تقارن را امتحان کنیم. اما این‌بار چون نمی‌توان فیل را در مرکز صفحهٔ شطرنج گذاشت این تقارن برای بازیکن دوم سودمند است. در مقایسه با مسألهٔ قبلی ممکن است به‌نظر برسد که با چنین استراتژیی بازیکن دوم می‌تواند برنده شود. با وجود این، اگر بازیکن دوم آن را دنبال کند حتی نمی‌تواند حرکت دومش را انجام دهد! فیلی که بازیکن اول می‌گذارد هر فیل را که در موقعیت قرینه‌اش نسبت به مرکز صفحه گذاشته شود تهدید می‌کند.

با این مثال معلوم می‌شود که در به کارگیری استراتژی تقارن باید این را در نظر گرفت که **حرکت متقارن را می‌توان متوقف یا از انجامش جلوگیری کرد منتها فقط به‌وسیلهٔ آخرین حرکت حریف.** به دلیل تقارن، حرکتهایی که پیشترها انجام شده‌اند بر حرکت بازیکن تأثیری ندارند. برای حل کردن بازیها با استفاده از استراتژی تقارن باید تقارنی یافت که حرکت قبلی استراتژی انتخاب‌شده را به باد ندهد.

بنابراین برای حل کردن مسألهٔ ۹ به جای تقارن نسبت به نقطه در صفحهٔ شطرنج باید به تقارن نسبت به خط اتکا کنیم. مثلاً می‌توانیم خط میان سطرهای چهارم و پنجم را به‌عنوان محور تقارن انتخاب کنیم. خانه‌هایی که نسبت به این خط قرینه‌اند همرنگ نیستند و بنابراین هر فیل در یکی از خانه‌ها فیلی در موقعیت قرینه‌اش را تهدید نمی‌کند. در نتیجه بازیکن دوم می‌تواند این بازی را ببرد.

ایدهٔ استراتژی تقارن لازم نیست صرفاً هندسی باشد. به مسألهٔ زیر توجه کنید.

مسألهٔ ۱۰. دو کپهٔ ۷تایی خرده‌سنگ داریم. در هر نوبت بازیکن می‌تواند هر تعداد خرده‌سنگ را که می‌خواهد بردارد منتها فقط از یکی از این دسته‌ها. بازنده بازیکنی است که نتواند دیگر خرده‌سنگ بردارد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

راه‌حل. بازیکن دوم می‌تواند با استفاده از استراتژی تقارن این بازی را ببرد. این بازیکن در هر نوبت باید همان تعداد خرده‌سنگ را بردارد که بازیکن اول در آخرین حرکتش برداشته است، منتها از دستهٔ دیگر. به این ترتیب بازیکن دوم همیشه یک حرکت دارد.

تقارن در این مسأله حفظ برابری تعداد خرده‌سنگهای دو دسته است.

مسألهٔ ۱۱. دو بازیکن به نوبت اسبهایی را روی خانه‌های صفحهٔ شطرنج طوری می‌گذارند که هیچ‌یک از آنها دیگری را تهدید نکند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۱۲. دو بازیکن به نوبت شاههایی را روی خانه‌های صفحهٔ شطرنجی ۹ × ۹ طوری می‌گذارند که هیچ‌یک از آنها دیگری را تهدید نکند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۱۳. الف) دو بازیکن به نوبت فیلهایی را روی خانه‌های صفحهٔ شطرنج می‌گذارند. در هر نوبت فیلی که روی صفحه گذاشته می‌شود باید دست‌کم یکی از خانه‌هایی را تهدید کند که

فیل دیگری آن را تهدید نکرده است. هر فیل خانه‌ای را که در آن قرار دارد «تهدید می‌کند». بازیکنی که نتواند دیگر فیلی در صفحه بگذارد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

ب)* اگر در قسمت (الف) به جای فیل، رخ باشد چطور می‌شود؟

مسألهٔ ۱۴. صفحهٔ شطرنجی ۱۰ × ۱۰ داده شده است. دو بازیکن به نوبت خانه‌های صفحه را دوتادوتا با دومینوها می‌پوشانند. هر دومینو مستطیلی است که در عرضش ۱ خانه وجود دارد و در طولش ۲ خانه (که به هر یک از دو حالت که گذاشته شود دو خانه را می‌پوشاند). دومینوها نباید همپوشانی داشته باشند. بازیکنی که نتواند دیگر دومینویی بگذارد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۱۵. در هر یک از خانه‌های صفحهٔ شطرنجی ۱۱ × ۱۱ مهره‌ای گذاشته شده است. بازیکنان به نوبت تعدادی دلخواه از مهره‌هایی را که روی یک سطر یا ستون پشت سر یکدیگرند برمی‌دارند. برنده بازیکنی است که آخرین مهره را بردارد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۱۶. دوکپه خرده‌سنگ داریم. یکی شامل ۳۰ خرده‌سنگ است و دیگری شامل ۲۰ خرده‌سنگ. بازیکنان به‌نوبت هر تعداد خرده‌سنگ را که مایل باشند برمی‌دارند منتها فقط از یک دسته. برنده بازیکنی است که آخرین خرده‌سنگ را بردارد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۱۷. بیست نقطه دور دایره‌ای گذاشته شده‌اند. بازیکنان به نوبت دو تا از نقطه‌ها را با پاره‌خطی که هیچ‌یک از پاره‌خطهایی را که قبلاً رسم شده‌اند قطع نمی‌کند به‌هم وصل می‌کنند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۱۸. یک گل داوودی

الف) ۱۲ گلبرگ؛

ب) ۱۱ گلبرگ،

دارد. بازیکنان به‌ترتیب یا یک گلبرگ را می‌کنند یا دوگلبرگ پشت سرهم را. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۱۹ *. مکعب مستطیلی به ابعاد

الف) ۴ × ۴ × ۴؛

ب) ۳ × ۴ × ۴؛

ج) ۳ × ۳ × ۴،

متشکل از مکعبهای واحد داده شده است. بازیکنان به‌نوبت یک ردیف از مکعبها را (موازی با یالهای شکل) سوراخ می‌کنند. تا وقتی که دست‌کم یک مکعب سوراخ‌نشده در ردیفی وجود داشته باشد بازی ادامه می‌یابد. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۲۰. دو بازیکن به‌نوبت یک تکه شکلات 10×5، شامل 50 مربع کوچک، را می‌شکنند. در هر نوبت می‌توانند تکه شکلاتها را از روی تقسیم‌بندیهای میان مربعها بشکنند. بازیکنی که زودتر یک مربع تکی شکلات به‌دست بیاورد برنده می‌شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۲۱. دو بازیکن به‌نوبت در خانه‌های صفحهٔ شطرنجی 9×9 علامتهای **x** و **o** می‌گذارند. بازیکن اول **x** می‌گذارد و دومی **o**. در پایان بازی به‌ازای هر سطر یا ستونی که در آن تعداد **x**ها بیشتر از تعداد **o**ها باشند اولی یک امتیاز می‌گیرد و به‌ازای هر سطر یا ستونی که در آن تعداد **o**ها بیشتر از تعداد **x**ها باشد دومی یک امتیاز می‌گیرد. بازیکنی که امتیازش بیشتر باشد می‌برد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

۳. موقعیتهای برد

مسألهٔ ۲۲. در صفحهٔ شطرنج یک رخ در خانهٔ $a1$ قرار دارد. بازیکنان به‌نوبت این رخ را هر تعداد خانه که بخواهند یا به‌طور افقی به‌طرف راست حرکت می‌دهند یا به‌طور عمودی به طرف بالا. بازیکنی که بتواند این رخ را در خانهٔ $h8$ قرار دهد می‌برد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

در این بازی بازیکن دوم بازی را می‌برد. استراتژیش بسیار ساده است: در هر نوبت رخ را در یکی از خانه‌های روی قطر میان $a1$ و $h8$ قرار می‌دهد. دلیل مؤثر بودن این استراتژی این است که بازیکن اول در هر نوبت مجبور است که رخ را از خانه‌های روی این قطر بیرون ببرد، در حالی‌که بازیکن دوم همیشه می‌تواند رخ را به خانه‌های روی قطر بازگرداند. چون خانه‌ای که برد در آن به‌دست می‌آید روی این قطر است، بازیکن دوم در نهایت می‌تواند رخ را در آن بگذارد.

اکنون این راه‌حل را کمی عمیقتر تحلیل می‌کنیم. در اینجا توانسته‌ایم دسته‌ای از موقعیتهای برد را (که در آنها رخ در یکی از خانه‌های روی قطر میان $a1$ و $h8$ واقع است) تعیین کنیم که این ویژگیها را دارند:

(۱) موقعیت پایانی بازی، خود، یکی از موقعیتهای برد است؛

(۲) هیچ‌یک از بازیکنان هرگز نمی‌تواند طی فقط یک نوبت رخ را از یک موقعیت برد به موقعیت برد دیگری ببرد؛

(۳) هر یک از بازیکنان همیشه می‌تواند فقط با یک حرکت رخ را از یک موقعیت غیربرد به یک موقعیت برد ببرد.

یافتن چنین دسته‌ای از موقعیتهای برد برای بازی معادل حل کردن بازی است. در واقع رفتن به موقعیتهای برد در هر حرکت، خودش استراتژی برد است. اگر موقعیت آغازین بازی موقعیت برد باشد، آن‌وقت بازیکن دوم بازی را می‌برد (همان‌طور که در بازی آخری دیدیم). در غیر این صورت بازیکن اول برنده می‌شود.

توصیه به معلمان. چون از مفهوم موقعیت برد مجموعه‌ای از استراتژیها به‌دست می‌آید، فقط بعد از حل چند تا از بازیهایی که در این بخش آمده است می‌توان آن را درک کرد. مثل همیشه مهم است که دانش‌آموزان را وادار کنید تا هر بازی را پیش از حل کردنش بازی کنند.

مسألهٔ ۲۳. شاهی در خانهٔ $a1$ صفحهٔ شطرنج گذاشته شده است. بازیکنان به‌نوبت این شاه را یا به طرف بالا می‌برند، یا به طرف راست یا به‌طور قطری به طرف بالا و راست. بازیکنی که شاه را در خانهٔ $h8$ بگذارد می‌برد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۲۴. دو دسته آب‌نبات داریم. یکی شامل ۲۰ عدد آب‌نبات است و دیگری شامل ۲۱ عدد آب‌نبات. بازیکنان به‌نوبت همهٔ آب‌نباتهای یک دسته را می‌خورند و آب‌نباتهای باقی‌مانده را به دو دستهٔ غیرخالی (که لازم نیست تعداد آب‌نباتهایشان برابر باشد) تقسیم می‌کنند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۲۵. در هر یک از دو سر یک ردیف از خانه‌ها به ابعاد 20×1 مهره‌ای گذاشته شده است. بازیکنان به‌نوبت هر یک از مهره‌ها را که بخواهند به طرف دیگری یا یک خانه حرکت می‌دهند یا دو خانه. هیچ‌یک از این دو مهره را نمی‌توان از روی مهرهٔ دیگر رد کرد. بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۲۶. قوطی‌ای ۳۰۰ چوب‌کبریت دارد. بازیکنان به نوبت می‌توانند از ۱ چوب‌کبریت تا حداکثر نصف تعداد چوب‌کبریتهای قوطی را بردارند. بازیکنی که نتواند این کار را انجام دهد می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۲۷. سه کپه خرده‌سنگ داریم. اولی ۵۰ خرده‌سنگ دارد، دومی ۶۰ تا و سومی ۷۰ تا. در هر نوبت هر یک از کپه‌هایی که شامل بیش از یک خرده‌سنگ است به دو کپهٔ کوچکتر تقسیم می‌شود. بازیکنی که بعد از آخرین حرکتش هر یک از کپه‌های حاصل فقط یک خرده‌سنگ داشته باشد می‌برد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۲۸. عدد ۶۰ روی تخته‌سیاه نوشته شده است. بازیکنان به نوبت از عدد روی تخته مقسوم‌علیه دلخواهی از آن را کم می‌کنند و حاصل تفریق را به‌جای عدد اولیه می‌نویسند. بازیکنی که عدد ۰ را بنویسد می‌بازد. چه‌کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۲۹*. دو دسته چوب‌کبریت داریم:

الف) یک دستهٔ ۱۰۱تایی و یک دستهٔ ۲۰۱تایی؛

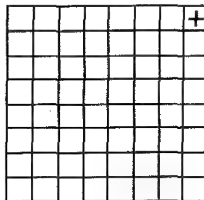
ب) یک دستهٔ ۱۰۰تایی و یک دستهٔ ۲۰۱تایی.

بازیکنان به‌نوبت چندتا چوب‌کبریت از یک دسته برمی‌دارند که تعدادشان برابر با یکی از مقسوم‌علیه‌های تعداد چوب‌کبریتهای دستهٔ دیگر است. بازیکنی که آخرین چوب‌کبریت را بردارد می‌برد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

۴. تحلیل از آخر: روشی برای یافتن موقعیتهای برد

کسانی که بخش قبلی را مطالعه کرده‌اند ممکن است این طور احساس کنند که یافتن مجموعه‌ای از موقعیتهای برد فقط متکی به شهود است و از این رو کار آسانی نیست. اکنون روشی کلی را شرح می‌دهیم که با آن می‌توانیم در بسیاری از بازیها مجموعه‌ای از موقعیتهای برد را پیدا کنیم.

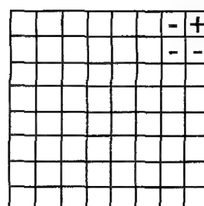
بار دیگر مسألهٔ ۲۳ را در نظر بگیرید که دربارهٔ یک شاه در صفحهٔ شطرنج است. در اینجا هم سعی می‌کنیم مجموعه‌ای از موقعیتهای برد را پیدا کنیم. مثل همیشه موقعیت پایانی این بازی که شاه در خانهٔ $h8$ قرار دارد باید موقعیت برد باشد. بنابراین یک علامت بعلاوه در خانهٔ $h8$ می‌گذاریم (شکل ۴۶ را ببینید). همین علامت را در هر خانهٔ دیگر هم که در آن شاه در موقعیت برد قرار می‌گیرد می‌گذاریم و در هر خانه‌ای هم که موقعیت برد نباشد یک علامت منها می‌گذاریم (اینها را موقعیتهای باخت می‌نامیم).



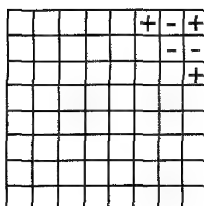
شکل ۴۶

چون خانه‌هایی که شاه را می‌توان از آنها فقط با یک حرکت به خانه‌های برد منتقل کرد خانه‌های باخت‌اند، شکل ۴۷ را به‌دست می‌آوریم. از خانه‌های $h6$ و $f8$ فقط می‌توان به خانه‌های باخت رفت و از این‌رو اینها باید موقعیتهای برد باشند (شکل ۴۸). از این موقعیتهای برد جدید موقعیتهای باخت جدید به‌دست می‌آیند: $h5$، $g5$، $g6$، $f7$، $e7$ و $e8$ (شکل ۴۹). به همین ترتیب کار را ادامه می‌دهیم (شکلهای ۵۰ و ۵۱ را ببینید). بعد از به‌دست آوردن مجموعه‌ای از علامتهای منها، در خانه‌هایی که هر حرکت از آنها در هر صورت به خانه‌های باخت منتهی می‌شود علامت بعلاوه می‌گذاریم و بعد هم در آن خانه‌هایی که از آنها دست‌کم یک حرکت به خانه‌های برد وجود دارد علامت منها. آخر سر آرایش علامتهای بعلاوه و منها مانند شکل ۵۲ می‌شود. اکنون به‌سادگی می‌توان فهمید که خانه‌هایی که علامت بعلاوه در آنها آمده است همان خانه‌های بردی‌اند که در بخش پیش به آنها اشاره کردیم.

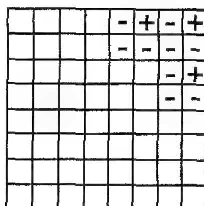
روش یافتن موقعیتهای برد را که الان شرح دادیم تحلیل از آخر می‌نامند. با استفاده از این روش در



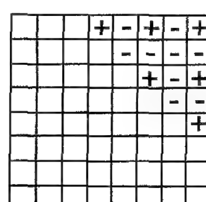
شکل ۴۷



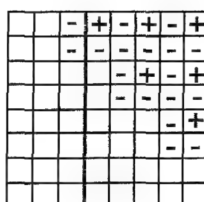
شکل ۴۸



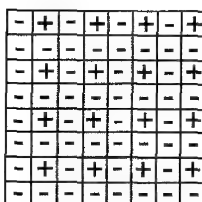
شکل ۴۹



شکل ۵۰

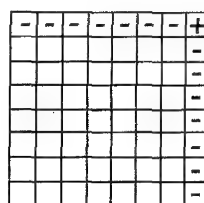


شکل ۵۱

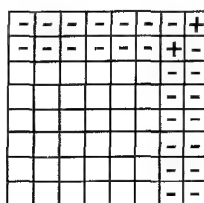


شکل ۵۲

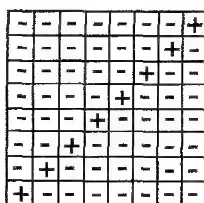
مورد بازی مربوط به رخ در بخش قبل (مسألهٔ ۲۲)، به‌دست آوردن مجموعهٔ موقعیتهای برد این بازی هم چندان دشوار نیست. اگر مانند شکلهای ۵۳ و ۵۴ عمل کنیم خیلی زود به شکل ۵۵ می‌رسیم.



شکل ۵۳



شکل ۵۴



شکل ۵۵

توصیه به معلمان. دانش‌آموزان در بیشتر موارد «تحلیل از آخر» را خودشان به‌طور شهودی انجام می‌دهند. یعنی از چند حرکت قبل، به آخر بازی نگاه می‌کنند و کم‌کم می‌فهمند که از چند حرکت ممکن آخری کدامها به برد می‌انجامند، بعد این را به بقیهٔ بازی تعمیم می‌دهند. در این مورد یادگیری وقتی به بهترین وجه ممکن حاصل می‌شود که دانش‌آموزان (با بازی کردن) خودشان به این **کشف برسند**، بعد از آنها خواسته شود که آن را بیان کنند.

مسألهٔ ۳۰. وزیری در خانهٔ $c1$ صفحهٔ شطرنج قرار دارد. بازیکنان به نوبت این وزیر را هر تعداد خانه که بخواهند به طرف راست، به طرف بالا یا به‌طور قطری به‌طرف راست و بالا حرکت می‌دهند. بازیکنی که بتواند این وزیر را در خانهٔ $h8$ بگذارد می‌برد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

راه‌حل. با استفاده از روش تحلیل از آخر، آرایش علامتهای بعلاوه و منها را که در شکل ۵۶ مشخص شده است به‌دست می‌آوریم. به این ترتیب بازیکن اول بازی را می‌برد؛ در حقیقت، برای نخستین حرکتش سه انتخاب دارد: به خانهٔ $c5$ برود یا به خانهٔ e۳ یا به خانهٔ d۱.

-	-	-	-	-	-	-	+
-	-	-	-	-	+	-	-
-	-	-	-	-	-	+	-
-	-	+	-	-	-	-	-
+	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	+	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	+	-	-	-	-

شکل ۵۶

توصیه به معلمان. این بازی را می‌توان پیش درآمدی مناسب برای آشنایی با روش تحلیل از آخر دانست. بعد از این، تمرینهای دانش‌آموزان را مثلاً می‌توان این‌طور طرح کرد که به‌جای صفحهٔ شطرنج مربع شکل مسأله‌های ۲۲، ۲۳، ۳۰ صفحه‌ای مستطیل شکل به ابعاد دلخواه یا صفحه‌ای به شکل نامتعارف دیگری قرار دهیم. مثلاً می‌توان مسألهٔ ۲۲ را در مورد صفحهٔ شطرنجی که چهار خانهٔ وسطی‌اش (یا چندتا از خانه‌های دیگرش) حذف شده‌اند حل کرد. آرایش علامتهای بعلاوه و منها در این جور صفحهٔ شطرنج در شکل ۵۷ نشان داده شده است؛ توجه کنید که در این شکل خانه‌های حذف شده سایه دارند.

-	-	-	-	-	-	-	+
-	-	-	-	-	-	+	-
-	-	-	-	-	+	-	-
-	-	+			-	-	-
-	+	-			-	-	-
-	-	-	-	+	-	-	-
-	-	-	+	-	-	-	-
+	-	-	-	-	-	-	-

شکل ۵۷

* * *

در مسألهٔ زیر دانش‌آموزان فرصت می‌یابند که شگرد عوض کردن صورتبندی بازی را بیاموزند.

مسألهٔ ۳۱. دو کپه خرده‌سنگ داریم که یکی از آنها ۷ خرده‌سنگ دارد و دیگری ۵ خرده‌سنگ. بازیکنان به‌نوبت هر تعداد خرده‌سنگ را که بخواهند از یکی از این کپه‌ها یا تعدادی برابر سنگریزه را از هریک از این کپه‌ها برمی‌دارند. بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

راه‌حل. شرایط این مسأله را می‌توانیم برحسب شرایطی که در صفحهٔ شطرنج معمولی پیش می‌آید بیان کنیم. ابتدا به هر خانهٔ صفحهٔ شطرنج مختصات نسبت می‌دهیم، این‌طور که سطرها را از ۰ تا ۷ و از

بالا به پایین و ستونها را هم از ۰ تا ۷ و از راست به چپ شماره‌گذاری می‌کنیم. اکنون هر موقعیت بازی اصلی با زوج مرتبی از عددها مشخص می‌شود: تعداد خرده‌سنگهای کپهٔ اول و به دنبال آن تعداد خرده‌سنگهای کپهٔ دوم. به هر موقعیت از این دست خانه‌ای را نسبت می‌دهیم که مختصاتش این عددها هستند. اکنون توجه می‌کنیم که هر حرکت در بازی اصلی متناظر با یک حرکت وزیر در صفحهٔ شطرنج به طرف بالا، به طرف راست یا به طور قطری به طرف بالا و راست است. این صورتبندی جدید مسأله باعث می‌شود که بازی عین همان بازی مسألهٔ ۳۰ شود. توجه کنید که می‌توانیم از همین فن برای صورتبندی دیگری از بازیهای مسأله‌های ۱۰ و ۲۰ استفاده کنیم.

* * *

مسألهٔ ۳۲. اسبی در خانهٔ $a1$ صفحهٔ شطرنج قرار دارد. بازیکنان به نوبت این اسب را یا دو خانه به طرف راست و یک خانه به طرف بالا یا پایین حرکت می‌دهند یا دو خانه به طرف بالا و یک خانه به طرف راست یا چپ (این اسب مانند اسب معمولی شطرنج حرکت می‌کند منتها در جهتهای محدود). بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۳۳. الف) دو کپهٔ ۷تایی خرده‌سنگ داریم. در هر نوبت بازیکن می‌تواند یک خرده‌سنگ از یکی از این کپه‌ها یا یک خرده‌سنگ از هر یک از آنها بردارد. بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد. چه‌کسی استراتژی برد دارد؟

ب) علاوه بر حرکتهایی که در قسمت (الف) برشمردیم، بازیکنان می‌توانند یک خرده‌سنگ از کپهٔ اول بردارند و آن را در کپهٔ دوم بگذارند. بقیهٔ قاعده‌های بازی همانهایی هستند که گفتیم. در این حالت چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۳۴. دو دستهٔ ۱۱تایی چوب کبریت داریم. در هر نوبت بازیکن باید دو چوب کبریت از یک دسته و یک چوب کبریت هم از دیگری بردارد. بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۳۵. این بازی با عدد ۰ شروع می‌شود. در هر نوبت بازیکن می‌تواند به عدد حاضر هر یک از عددهای طبیعی از ۱ تا ۹ را که بخواهد اضافه کند. بازیکنی که به عدد ۱۰۰ برسد برنده می‌شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۳۶. این بازی با عدد ۱ شروع می‌شود. در هر نوبت بازیکن می‌تواند عدد حاضر را در هر یک از عددهای طبیعی از ۲ تا ۹ که بخواهد ضرب کند. بازیکنی که زودتر به عددی بزرگتر از ۱۰۰۰ برسد برنده می‌شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۳۷. این بازی با عدد ۲ شروع می‌شود. در هر نوبت بازیکن می‌تواند به عدد حاضر هر یک از

عددهای طبیعی کوچکتر از آن را که بخواهد اضافه کند. بازیکنی که به عدد ۱۰۰۰ برسد برنده می‌شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟

مسألهٔ ۳۸. این بازی با عدد ۱۰۰۰ شروع می‌شود. در هر نوبت بازیکن می‌تواند از عدد حاضر هریک از عددهای طبیعی کوچکتر از آن را که توانی از ۲ باشد (توجه کنید که $۲^{۰} = ۱$) کم کند. بازیکنی که به عدد ۰ برسد برنده می‌شود. چه کسی استراتژی برد دارد؟

فصل ۸

مسأله‌هایی برای سال اول

همان‌طور که در پیشگفتار تأکید شد، در بخش نخست این کتاب مبحثهای اصلی برای جلسه‌های محافل ریاضی «المپیاد» (ویژهٔ دانش‌آموزان ۱۱ تا ۱۳ ساله) آورده شده‌اند. با این وجود، این مبحثها همهٔ موضوعهای قابل استفاده دانش‌آموزان این ردهٔ سنی نیستند. در فصل حاضر سعی می‌کنیم این خلأ را دست‌کم تا اندازه‌ای پر کنیم.

توصیه به معلمان. در اینجا مایلیم این را هم اضافه کنیم که صلاح نمی‌دانیم که هر جلسه فقط با استفاده از مسأله‌های مربوط به یک مبحث برگزار شود. در کلاسها می‌توانید از مسأله‌های نامتعارف هم استفاده کنید که حلشان چیزی جدید و نامعمول، ایده‌های تازه یا صرفاً غلبه بر دشواریهای فنی را بطلبند. چون مسأله‌هایی از این دست در المپیاد، مسابقه‌های ریاضی و فعالیتهایی از این قبیل اهمیت زیادی دارند، آنها را در این فصل گرد آورده‌ایم.

۱. مسأله‌های منطقی

توصیه به معلمان. وقتی با دانش‌آموزان کم‌سن و سال سر و کار دارید به یاد داشته باشید که مهمترین هدفتان این است که به آنها بیاموزید منطقی و شفاف فکر کنند. یعنی اینکه چطور علت و معلول را با هم اشتباه نکنند؛ چطور حالتها را با دقت تحلیل کنند بی‌آنکه هیچ کدامشان را از قلم بیندازند؛ چطور تعدادی قضیه و لم را طوری پشت سرهم ردیف کنند که مسأله‌شان حل شود. مسأله‌های منطقی زیر در رسیدن به این هدف کمکتان می‌کنند.

۱. مادر پیتر گفت: «همهٔ قهرمانان ریاضیشان خوب است.» پیتر می‌گوید: «من ریاضیم خوب است. بنابراین قهرمانم!» استلزامش درست است یا غلط؟

۲. چهارکارت روی میزی وجود دارند که روی طرف قابل رؤیتشان نمادهای A، B، ۴ و ۵ نوشته شده است. دست‌کم چند کارت را باید برگردانیم تا بفهمیم گزارهٔ زیر درست است یا نه: «اگر روی یک طرف کارتی عددی زوج نوشته شده باشد، آن‌وقت روی طرف دیگرش یک حرف صدادار نوشته شده است»؟

۳. مبلغ پانزده سنت را با دو سکه پرداختیم و در ضمن یکی از این سکه‌ها پنج‌سنتی نبود. این سکه‌ها چندسنتی بوده‌اند؟

۴. فرض کنید گزاره‌های زیر درست باشند:

الف) در میان افرادی که تلویزیون دارند کسانی هستند که ریاضیدان نیستند؛

ب) کسی که ریاضیدان نیست و هر روز در استخر شنا می‌کند تلویزیون ندارد.

آیا می‌توانیم ادعا کنیم که، این‌طور نیست که همهٔ افرادی که تلویزیون دارند هر روز شنا می‌کنند؟

۵. در محاکمه‌ای در سرزمین عجایب خرگوش خُل ادعا کرد که بیسکویتها را کلاهدوز دیوانه دزدیده است. بعد کلاهدوز دیوانه و سنجابک مدارکی ارائه کردند که به دلایلی ثبت نشدند. بعدها در این محاکمه معلوم شد که بیسکویتها را فقط یکی از این سه متهم دزدیده و علاوه بر این فقط شخص مجرم مدرک واقعی ارائه کرده است. چه کسی بیسکویتها را دزدیده است؟

* * *

۶. در یک جامدادی مدادهایی دست‌کم از دو رنگ و اندازهٔ متفاوت وجود دارند. ثابت کنید که در این جامدادی دو مداد وجود دارند که هم رنگشان با هم فرق دارد و هم اندازه‌شان.

۷. در سه ظرف تعدادی توپ وجود دارد: اولی شامل دو توپ سفید است، دومی شامل دو توپ سیاه و سومی شامل یک توپ سفید و یک توپ سیاه. برچسبهای WW، BB و WB به ظرفها طوری چسبانده شده‌اند که محتوای هیچ‌یک از ظرفها با برچسبش مطابقت ندارد. آیا می‌توان یک ظرف را طوری انتخاب کرد که بعد از بیرون آوردن یک توپ از آن در هر صورت بتوان محتوای هر یک از ظرفها را مشخص کرد؟

۸. سه نفر به‌نامهای A، B و C در یک ردیف طوری نشسته‌اند که A، B و C را می‌بیند، B فقط C را می‌بیند و C هیچ کسی را نمی‌بیند. به آنها ۵ تا کلاه بافتنی نشان می‌دهند که ۳ تا از آنها قرمزند و ۲ تا سفید. به این سه نفر چشم‌بند می‌زنند و سه‌تا کلاه بر سرشان می‌گذارند. بعد چشم‌بندهایشان را بر می‌دارند و از آنها می‌پرسند که آیا می‌توانند رنگ کلاه‌هایشان را مشخص کنند. پس از آن، A و بعد B پاسخ می‌دهد خیر و آخر سر، C پاسخ می‌دهد بله. چطور چنین چیزی ممکن است؟

۹. سه نفر دوست به نامهای سفید، مشکی و مو قرمز که به‌ترتیب مجسمه‌ساز، ویولن‌زن و نقاش‌اند یکدیگر را در کافه‌تریایی ملاقات کردند. از میان آنها شخص مومشکی گفت: «این فوق‌العاده است

که از ماها یکی موسفید است، دیگری مو مشکی و سومی مو قرمز، گرچه نام هیچ‌کس رنگ موهایش نیست». سفید هم پاسخ داد: «حق با شماست». رنگ موهای نقاش چیست؟

* * *

موضوع هشت مسألهٔ بعدی دربارهٔ ساکنان یک جزیره است. این جزیره‌نشینان دو دسته‌اند، یا «نجیب‌زاده»اند، کسانی که همیشه راست می‌گویند، یا «متقلب»اند، کسانی که همیشه دروغ می‌گویند.

۱۰. شخص A گفت: «من دروغگو هستم.» آیا او یکی از ساکنان جزیره موردنظر است؟

۱۱. فقط با پرسیدن یک سؤال از جزیره‌نشینی می‌توانیم بفهمیم که جاده‌ای به شهر نجیب‌زادگان منتهی می‌شود یا به شهر متقلبها. با چه سؤالی؟

۱۲. فقط با پرسیدن یک سؤال از جزیره‌نشینی می‌توانیم بفهمیم که آیا او تمساح خانگی دارد یا نه. با چه سؤالی؟

۱۳. فرض کنید در زبان این جزیره تلفظ کلمه‌های «بله» و «نه» چیزی شبیه «شِلِپ» و «شلوپ» باشد، منتها نمی‌دانیم کدام به کدام است. با توجه به این موضوع فقط با پرسیدن یک سؤال از جزیره‌نشینی می‌توانیم بفهمیم که نجیب‌زاده است یا متقلب. با چه سؤالی؟

۱۴. فقط یک سؤال می‌توان از جزیره‌نشینها پرسید که پاسخش همیشه «شِلِپ» باشد. این سؤال کدام است؟

۱۵. جزیره‌نشین A در حضور جزیره‌نشین B گفت: «در میان ما دست‌کم یکی متقلب است.» A نجیب‌زاده است یا متقلب؟ B چطور؟

۱۶. از سه نفر به‌نامهای A، B و C یکی نجیب‌زاده است، یکی متقلب و یکی هم غریبه (شخصی عادی) که بعضی وقتها راست می‌گوید و بعضی وقتها دروغ.

A گفت: «من شخصی عادی‌ام.»

B گفت: «A و C بعضی وقتها راست می‌گویند.»

C گفت: «B شخصی عادی است.»

از میان این افراد کدام‌یک نجیب‌زاده است، کدام‌یک متقلب و کدام‌یک شخصی عادی؟

۱۷. چند تن از جزیره‌نشینان در همایشی یکدیگر را دیدند و هر یک از آنها به دیگران گفت: «شما همگی متقلب‌اید.» چند نجیب‌زاده ممکن است در این همایش شرکت کرده باشند؟

۲. ساختنیها و وزن کردنها

مسأله‌های ریاضی و منطقی‌ای که برای حلشان باید مثالی خاص پیدا کرد بسیار متداول و ارزشمندند. دانش‌آموزان باید درک کنند که یافتن مثال ممکن است راه‌حل کامل نوعی از مسأله‌ها باشد (مانند

مسأله‌هایی که با عبارت «آیا می‌توان . . .؟» آغاز می‌شوند). مسأله‌هایی از این دست معمولاً برای دانش‌آموزان کم سن و سال‌تر بسیار جذاب‌اند و آنها می‌توانند کلی از وقتشان را صرف تلاش برای یافتن راه‌حلی ساختنی برای سؤال یا معمایی پیچیده کنند.

۱۸. دو تا ساعت شنی داریم: یکی ۷ دقیقه‌ای و دیگری ۱۱ دقیقه‌ای. باید تخم‌مرغی را درست ۱۵ دقیقه آب‌پز کنیم. چطور می‌توانیم فقط با استفاده از این ساعتها این کار را انجام دهیم؟

۱۹. درون آسانسوری در ساختمانی بیست طبقه دو دکمه وجود دارد. وقتی دکمهٔ اول فشار داده شود آسانسور ۱۳ طبقه بالا می‌رود و وقتی دومی فشار داده شود آسانسور ۸ طبقه پایین می‌رود (اگر تعداد طبقه‌ها برای بالا یا پایین رفتن کافی نباشد دکمه عمل نمی‌کند). چطور می‌توانیم با این آسانسور از طبقهٔ ۱۳ام به طبقهٔ ۸ام برویم؟

۲۰. عدد ۴۵۸ روی تخته‌سیاه نوشته شده است. هر بار می‌توان یا عدد روی تخته را دو برابر کرد یا رقم یکانش را پاک کرد. چطور می‌توانیم با استفاده از این عملها از عدد داده شده عدد ۱۴ را به‌دست بیاوریم؟

۲۱. کارتهایی که رویشان عددهای ۷، ۸، ۹، ۴، ۵، ۶، ۱، ۲ و ۳ نوشته شده است به همین ترتیب در یک ردیف چیده شده‌اند. هر بار می‌توان چند کارت پشت سر هم را انتخاب کرد و آنها را به ترتیب عکس چید. آیا می‌توان بعد از انجام سه عمل از این دست آرایش ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ را به‌دست آورد؟

۲۲. عددهای ۱ تا ۱۶ در خانه‌های جدولی ۴ × ۴ عین شکل ۵۸ (الف) گذاشته شده‌اند. هر بار می‌توان به همهٔ عددهای هر سطر ۱ واحد اضافه کرد یا از همهٔ عددهای هر ستون ۱ واحد کم کرد. آیا می‌توان با استفاده از این عملها جدول شکل ۵۸ (ب) را به‌دست آورد؟

(الف)

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶

(ب)

۱	۵	۹	۱۳
۲	۶	۱۰	۱۴
۳	۷	۱۱	۱۵
۴	۸	۱۲	۱۶

شکل ۵۸

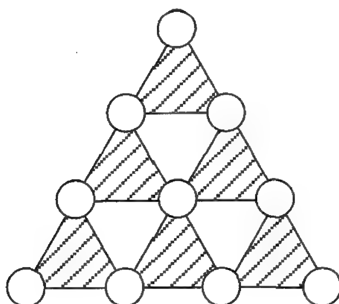
۲۳. آیا می‌توان عددهای ۱ تا ۱۰۰ را در یک ردیف طوری نوشت که تفاضل (مثبت) هر دو عدد پهلوی هم از ۵۰ کمتر نباشد؟

۲۴. مجموعه‌ای از سنگریزه‌ها به وزنهای ۱، ۲، ۳، . . . و ۵۵۵ گرم را به سه کپهٔ هم‌وزن تقسیم کنید.

۲۵. خانه‌های جدولی ۴ × ۴ را با عددهایی غیر صفر طوری پر کنید که مجموع عددهای گوشه‌های هر مربع ۲ × ۲، ۳ × ۳ یا ۴ × ۴ صفر باشد.

۲۶. آیا می‌توان یالهای مکعبی را با استفاده از عددهای ۱ تا ۱۲ طوری برچسب زد که مجموع عددهای روی هر یک از دو وجه دلخواه مکعب با هم برابر باشد؟

*۲۷. آیا می‌توان عددهای ۰ تا ۹ را در دایره‌های شکل ۵۹ بدون تکرار طوری گذاشت که همهٔ مجموعهای عددها در رأسهای مثلثهای سایه‌دار با هم برابر باشند؟



شکل ۵۹

۲۸. ثابت کنید می‌توان چند رقم از اول و چند رقم از آخر عدد ۴۰۰ رقمی ۸۴۱۹۸۴۱۹...۸۴۱۹ ۸۴۱۹ طوری خط زد که مجموع رقمهایی که می‌مانند ۱۹۸۴ باشد.

۲۹. عددی دو رقمی پیدا کنید که وقتی در هر یک از عددهای یک رقمی ضرب می‌شود مجموع رقمهایش تغییر نکند.

۳۰. آیا دو عدد طبیعی متوالی وجود دارند که مجموع رقمهای هر یک از آنها بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟

۳۱. آیا چند عدد مثبت وجود دارند که مجموعشان ۱ باشد و مجموع مربعهایشان کمتر از ۰٫۰۱؟

۳۲. قلعه‌ای از ۶۴ اتاق مربع‌شکل عین هم تشکیل شده است که در هر دیوارشان دری وجود دارد و به شکل مربعی ۸ × ۸ قرار گرفته‌اند. کف همهٔ اتاقها سفیدند. هر روز صبح نقاشی در قلعه گردش می‌کند و رنگ کف همهٔ اتاقهایی را که به آنها می‌رود از سفید به سیاه و برعکس تغییر می‌دهد. آیا ممکن است روزی رنگ‌آمیزی کف کل اتاقها مانند صفحهٔ شطرنج معمولی شود؟

۳۳. آیا می‌توان تعدادی سکهٔ ده سنتی را روی سطح یک میز طوری گذاشت که هر سکه درست به سه سکهٔ دیگر مماس باشد؟

۳۴. در انباری N تا صندوق به شماره‌های ۱ تا N در دو ستون چیده شده‌اند. با یک لیفت‌تراک هر بار می‌توان چند تا صندوق را از بالای یکی از این ستونها برداشت و بالای ستون دیگر گذاشت. ثابت کنید که همهٔ این صندوقها را می‌توان در یک ستون به‌ترتیب افزایش شماره‌هایشان با $2N - 1$ بار استفاده از لیفت‌تراک چید.

* * *

مسأله‌های بسیاری دربارهٔ وزن کردن وجود دارند که تا حد زیادی به مسأله‌های ساختنی مربوط‌اند. در حل این مسأله‌ها حتی ساده‌ترین یا نامحتمل‌ترین حالتها را هم نباید نادیده گرفت. استدلالهایی مانند «ما بدترین حالت را در نظر می‌گیریم» معمولاً بسیار مبهم‌اند و از این‌رو غیرقابل قبول.

در همهٔ مسأله‌های این مجموعه فرض می‌کنیم «وزن کردن» با ترازوی دوکفه‌ای معمولی انجام می‌شود که عقربه و وزنه ندارد مگر آنکه خلاف این صراحتاً ذکر شود.

۳۵. ۹ سکه داریم که یکی از آنها تقلبی است (این سکه از بقیهٔ سکه‌ها سبکتر است). با دو بار وزن کردن این سکهٔ تقلبی را پیدا کنید.

۳۶. ۱۰ کیسه داریم که توی آنها سکه است. یکی از آنها فقط شامل سکه‌های تقلبی است که هر یک از آنها از سکهٔ اصل یک گرم سبکتر است. فقط با یک بار وزن کردن با استفاده از ترازوی عقربه‌دار که اختلاف وزن کفه‌ها را نشان می‌دهد کیسهٔ سکه‌های «تقلبی» را پیدا کنید.

۳۷. ۱۰۱ سکه داریم که وزن فقط یکی از آنها با سکه‌های دیگر (که اصل‌اند) فرق می‌کند. باید تعیین کنیم که این سکهٔ تقلبی از سکهٔ اصل سنگینتر است یا سبکتر. چطور می‌توان با دو بار وزن کردن این کار را انجام داد؟

۳۸. ۶ سکه داریم؛ دوتایشان تقلبی‌اند و از سکه‌های اصل سبکترند. با سه بار وزن کردن هر دو سکهٔ تقلبی را مشخص کنید.

۳۹. ۱۰ کیسه داریم که توی آنها سکه است و بعضی از این کیسه‌ها فقط شامل سکه‌های تقلبی‌اند. سکهٔ تقلبی از سکهٔ اصل ۱ گرم سبکتر است. در ضمن، می‌دانیم یکی از کیسه‌ها با سکه‌های اصل پر شده است. با یک بار وزن کردن با استفاده از ترازویی یک شیء کفه‌ایی و عقربه‌دار که وزن شیء روی کفه را نشان می‌دهد مشخص کنید که کدام کیسه‌ها فقط شامل سکه‌های «تقلبی»اند و کدامها این‌طور نیستند.

۴۰. ۵ سکه داریم که سه‌تایشان اصل‌اند. دو سکهٔ دیگر تقلبی‌اند و یکی از آنها از سکهٔ اصل سنگینتر است و دیگری سبکتر. با سه بار وزن کردن هر دو سکهٔ تقلبی را پیدا کنید.

۴۱. ۶۸ سکه به وزنهای مختلف داریم. با ۱۰۰ بار وزن کردن سنگینترین و سبکترین سکه را پیدا کنید.

۴۲. ۶۴ سنگریزه به وزنهای مختلف داریم. با ۶۸ بار وزن کردن سنگینترین سنگریزه و سنگینترین سنگریزهٔ بعدی را پیدا کنید.

۴۳. ۶ وزنه داریم: دو تا سبز، دو تا قرمز و دو تا سفید. در هر یک از این جفتها یکی از وزنه‌ها سنگینتر است. همهٔ وزنه‌های سنگین هم‌وزن‌اند و وزنه‌های سبک نیز همین‌طورند. با دو بار وزن کردن مشخص کنید که وزنه‌های سنگین کدامها هستند.

۴۴. ۶ سکه داریم که دوتایشان تقلبی‌اند: *این سکه‌ها ۰٫۱ گرم از سکه‌های اصل سنگینترند.* کفه‌های ترازویی فقط در صورتی از حالت تعادل خارج می‌شوند که اختلاف وزن دو کفه دست‌کم ۰٫۲ گرم باشد. با چهاربار وزن کردن هر دو سکهٔ تقلبی را پیدا کنید.

۴۵. الف) ۱۶ سکه داریم که یکی از آنها تقلبی است؛ وزن این سکه با وزن سکهٔ اصل فرق دارد، اما نمی‌دانیم که از سکهٔ اصل سنگینتر است یا سبکتر. با چهار بار وزن کردن سکهٔ تقلبی را پیدا کنید.

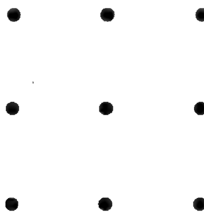
ب)* ۱۲ سکه داریم که یکی از آنها تقلبی است؛ وزن این سکه با وزن سکهٔ اصل فرق دارد، اما نمی‌دانیم که از سکهٔ اصل سنگینتر است یا سبکتر. با سه بار وزن کردن سکهٔ تقلبی را پیدا کنید.

*۴۶. چهارده سکه به‌عنوان مدرک در دادگاه ارائه شده‌اند. قاضی می‌داند که از این سکه‌ها دقیقاً ۷ تا تقلبی‌اند و وزنشان از وزن سکه‌های اصل کمتر است. وکیلی ادعا می‌کند که می‌داند کدام سکه‌ها تقلبی‌اند و کدامها اصل، که از او خواسته می‌شود ادعایش را ثابت کند. این وکیل چطور می‌تواند فقط با سه بار وزن کردن این کار را انجام دهد؟

۳. مسأله‌هایی از هندسه

مسأله‌های این بخش را می‌توان به‌طور طبیعی به دو گروه تقسیم کرد. موضوع مسأله‌های گروه نخست (مسأله‌های ۴۷ تا ۵۷) همان موضوع بخش قبلی است: این گروه از مسأله‌ها به یافتن مثالهایی هندسی اختصاص دارد. گروه دوم شامل مسأله‌های «متعارف»تر هندسه است.

۴۷. خطی شکسته رسم کنید که از ۴ تکه تشکیل شده باشد و از هر ۹ نقطهٔ شکل ۶۰ بگذرد.



شکل ۶۰

۴۸. مربعی را به ۵ مستطیل طوری تقسیم کنید که هیچ دو تایی از آنها در یک ضلع کامل مشترک نباشند (اما ممکن است بخشهایی از ضلعهایشان مشترک باشند).

۴۹. آیا می‌توان خطی شکسته، ۸ تکه‌ای و بسته رسم کرد که هر یک از تکه‌هایش را دقیقاً یک بار قطع کند؟

۵۰. آیا می‌توان مربعی را به چند مثلث منفرجه تقسیم کرد؟

۵۱. آیا درست است که در میان هر ۱۰ پاره‌خط همیشه ۳ پاره‌خط وجود دارند که می‌توان با آنها یک مثلث رسم کرد؟

۵۲. پادشاهی می‌خواهد ۶ دژ بسازد و هر دو تا از آنها را با یک راه به هم وصل کند. نقشهٔ دژها و راهها را طوری بکشید که در آن فقط ۳ تقاطع وجود داشته باشد و هر یک از آنها محل تلاقی دو راه متقاطع باشد.

۵۳. آیا می‌توان ۶ نقطه را در صفحه انتخاب کرد و آنها را با پاره‌خطهایی جدا از هم (یعنی با پاره‌خطهایی که نقطهٔ درونی مشترکی ندارند) طوری به هم وصل کرد که هر نقطه دقیقاً به ۴ نقطهٔ دیگر وصل باشد؟

۵۴. آیا می‌توان صفحه را با پنج‌ضلعیهایی همنهشت فرش کرد؟

۵۵. مستطیلی ۹ × ۳ را به ۸ مربع تقسیم کنید.

۵۶. ثابت کنید هر مربع را می‌توان به ۱۹۸۹ مربع تقسیم کرد.

۵۷. مثلثی دلخواه را به ۳ تکه ببرید که بتوان آنها را طوری پهلوی هم چید که یک مستطیل تشکیل شود.

* * *

۵۸. در مثلث ABC نقطه‌های M و K به‌ترتیب روی ضلعهای AB و BC قرار دارند. پاره‌خطهای AK و CM یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. ثابت کنید اگر $OM = OK$ و $\angle KAC = \angle MCA$، آن وقت مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۵۹. در مثلث ABC ارتفاع AK، نیمساز BH و میانهٔ CM یکدیگر را در یک نقطهٔ O قطع کرده‌اند و $AO = BO$. ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۶۰. در شش‌ضلعی $ABCDEF$ مثلثهای ABC، ABF، FED، CDB، FEA و CDE همنهشت‌اند. ثابت کنید قطرهای AD، BE و CF برابرند.

۶۱. در مثلث حادهٔ ABC ارتفاع CH و میانهٔ BK رسم شده‌اند. اگر

$$\angle KBC = \angle HCB \ \text{و} \ BK = CH$$

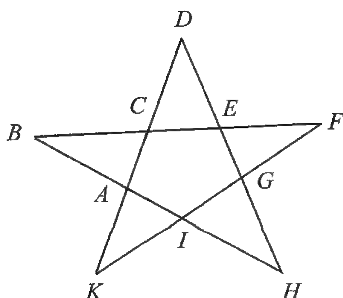
ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است.

۶۲. در چهارضلعی $ABCD$ قطرهای AC و BD یکدیگر را در نقطهٔ O قطع می‌کنند. محیط مثلثهای ABC و ABD با هم برابر است و محیط مثلثهای ACD و BCD نیز با هم. ثابت کنید $AO = BO$.

۶۳. ثابت کنید نمی‌توان ستارهٔ شکل ۶۱ را طوری رسم کرد که در آن نابرابریهای

$$BC > AB, \quad DE > CD, \quad FG > EF, \quad HI > GH, \quad KA > IK$$

برقرار باشند.



شکل ۶۱

۴. مسأله‌هایی دربارهٔ عددهای صحیح

این مبحث پیش از این در فصل «بخش‌پذیری و باقی‌مانده‌ها» مطرح شده است. با وجود این، مسأله‌های قشنگ بسیاری دربارهٔ عددهای صحیح وجود دارند؛ چنین مسأله‌هایی آن‌قدر زیادند که لازم دانستیم تعدادی از آنها را در این بخش بیاوریم. مثلاً مجموعه مسأله‌های ۷۰ تا ۸۴ دقیقاً ادامهٔ مسأله‌های فصل بخش‌پذیری است. محتوای مسأله‌های دیگر جدید است.

۶۴. اگر در کلاسی هر دانش‌آموز راست‌دست یک کیک بخرد و هر دانش‌آموز چپ‌دست یک ساندویچ خرجشان یک سنت کمتر از وقتی می‌شود که هر دانش‌آموز راست‌دست یک ساندویچ بخرد و هر دانش‌آموز چپ‌دست یک کیک. می‌دانیم که تعداد راست‌دستهای این کلاس از تعداد چپ‌دستهایش بیشتر است. اختلاف تعداد راست‌دستها و چپ‌دستها را پیدا کنید.

۶۵. قیمت ۱۷۵ هامپتی از قیمت ۱۲۶ دامپتی بیشتر است. ثابت کنید که نمی‌توانید سه تا هامپتی و یک دامپتی را به یک دلار بخرید.

۶۶. در کلاسی هر دانش‌آموز راست‌دست دقیقاً سه دوست چپ‌دست دارد و هر دانش‌آموز چپ‌دست هم دقیقاً دو دوست راست‌دست. در ضمن، می‌دانیم که در این کلاس فقط ۱۹ نیمکت وجود دارد (که در هر یک از آنها حداکثر دو دانش‌آموز جا می‌گیرد) و ۳۱ نفر از دانش‌آموزان این کلاس فرانسه می‌خوانند. این کلاس چند دانش‌آموز دارد؟

۶۷. دو تیم در رشتهٔ دهگانه با هم مسابقه می‌دهند. در هر مسابقه تیم برنده ۴ امتیاز می‌گیرد و تیم بازنده ۱ امتیاز، و در صورت تساوی هر یک از تیمها ۲ امتیاز می‌گیرد. بعد از انجام همهٔ ۱۰ مسابقه این دو تیم روی‌هم ۴۶ امتیاز به‌دست آورده‌اند. چند مسابقه به تساوی ختم شده است؟

۶۸. چهار دوست یک قایق خریدند. اولی، دومی و سومی به‌ترتیب نصف، یک سوم و یک چهارم مبلغ پرداختی دیگران را پرداخت کردند و چهارمی ۱۳۰ دلار پرداخت کرد. قیمت این قایق چقدر بوده و هر یک از این دوستان چند دلار پرداخت کرده است؟

۶۹. جاده‌ای که دو روستای کوهستانی را به هم وصل می‌کند تماماً سربالایی یا سرازیری است. اتوبوسی همیشه در سربالایی با سرعت ۱۵ مایل در ساعت حرکت می‌کند و در سرازیری با سرعت ۳۰ مایل در ساعت. اگر یک سفر رفت و برگشت میان این دو روستا با این اتوبوس دقیقاً ۴ ساعت طول بکشد، فاصلهٔ میان آنها را پیدا کنید.

* * *

۷۰. آیا عددهایی طبیعی مانند a و b وجود دارند که $ab(a-b) = ۴۵۰۴۵$؟

۷۱. مجموع سه عدد طبیعی متوالی را با a و مجموع سه عدد طبیعی متوالی بعدی را با b نشان می‌دهیم. آیا ممکن است که حاصل‌ضرب ab برابر با عدد ۱۱۱۱۱۱۱۱۱ باشد؟

۷۲. ثابت کنید آخرین رقم غیرصفر سمت راست عدد !۱۹۸۵ زوج است.

۷۳. عددهای طبیعی x و y در تساوی $۳۴x = ۴۳y$ صدق می‌کنند. ثابت کنید عدد $x+y$ مرکب است.

۷۴. آیا عددهایی صحیح و غیرصفر مانند a و b وجود دارند که یکی از آنها بر مجموعشان بخش‌پذیر باشد و دیگری به تفاضلشان؟

۷۵. عددهای اول p و q و عدد طبیعی n در برابری

$$\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} + \frac{۱}{pq} = \frac{۱}{n}$$

صدق می‌کنند. این عددها را پیدا کنید.

۷۶. ثابت کنید عددی طبیعی که با استفاده از یک رقم ۱، دو رقم ۲، سه رقم ۳، ... و نه رقم ۹ نوشته می‌شود ممکن نیست مربع کامل باشد.

۷۷. هر یک از عددهای طبیعی a، b، c و d بر $ab - cd$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $ab - cd$ یا برابر با ۱ است یا برابر با ۱−.

۷۸. درکشوری چهار نوع اسکناس رایج است: اسکناسهای ۱ دلاری، ۱۰ دلاری، ۱۰۰ دلاری و ۱۰۰۰ دلاری. آیا می‌توان مبلغ یک میلیون دلار را دقیقاً با استفاده از پانصد هزار اسکناس پرداخت کرد؟

۷۹. عدد ۱ روی تخته‌سیاه نوشته شده است. در هر ثانیه به عدد روی تخته مجموع رقمهایش را اضافه می‌کنیم. آیا ممکن است در لحظه‌ای عدد ۱۲۳۴۵۶ روی تخته نقش ببندد؟

۸۰. ثابت کنید عدد ۳۹۹۹۹۹۱ اول نیست.

۸۱. الف) عددی هفت‌رقمی با رقمهای متمایز پیدا کنید که بر هر یک از رقمهایش بخش‌پذیر باشد.

ب) آیا عددی هشت‌رقمی با همین ویژگی وجود دارد؟

۸۲. مجموع رقمهای عدد $۱۹^{۱۰۰}$ را حساب می‌کنیم. بعد مجموع رقمهای عدد حاصل را پیدا می‌کنیم و همین کار را ادامه می‌دهیم، تا وقتی که فقط یک رقم به‌دست بیاوریم. این رقم کدام است؟

۸۳. ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد اول بر ۳۰ یا ۱ است یا عددی اول.
۸۴. آیا عددی طبیعی وجود دارد که حاصل‌ضرب رقمهایش برابر با ۱۹۸۰ باشد؟

* * *

۸۵. عددی طبیعی به ۲ ختم می‌شود. اگر این رقم ۲ را به ابتدای عدد منتقل کنیم عدد موردنظر دو برابر می‌شود. کوچکترین عدد با این ویژگی را پیدا کنید.
۸۶. $\overline{abcdef}$ عددی شش‌رقمی است و $\overline{abc}-\overline{def}$ بر ۷ بخش‌پذیر است. ثابت کنید عدد موردنظر خودش هم بر ۷ بخش‌پذیر است.
۸۷. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که یک چهارم عددی باشد که با همان رقمها منتها به‌ترتیب عکس نوشته می‌شود.
۸۸. در عددی سه‌رقمی اختلاف رقمهای اول و آخر دست‌کم ۲ است. تفاضل (مثبت) این عدد و مقلوبش (عددی که با همان رقمها منتها به‌ترتیب عکس نوشته می‌شود) را پیدا می‌کنیم. بعد عدد حاصل را با مقلوبش جمع می‌کنیم. ثابت کنید که مجموع به‌دست آمده برابر با ۱۰۸۹ است.

* * *

۸۹. کدام عدد بزرگتر است: $۲^{۳۰۰}$ یا $۳^{۲۰۰}$؟
۹۰. کدام عدد بزرگتر است: $۳۱^{۱۱}$ یا $۱۷^{۱۴}$؟
۹۱. کدام عدد بزرگتر است: $۵۰^{۹۹}$ یا $!۹۹$؟
۹۲. کدام عدد بزرگتر است

$$۸۸۸\ldots۸۸ \times ۳۳۳\ldots۳۳$$

یا

$$۴۴۴\ldots۴۴ \times ۶۶۶\ldots۶۷$$

(هر یک از این عددها ۱۹۸۹ رقمی است)؟
۹۳. کدام نوع از عددهای شش‌رقمی بیشترند: عددهایی که می‌توان آنها را به‌شکل حاصل‌ضرب دو عدد سه‌رقمی نوشت یا عددهایی که این‌طور نیستند؟

* * *

۹۴. چند مثلث کاغذی همنهشت داریم. رأسهای هر یک از آنها با عددهای ۱، ۲ و ۳ علامتگذاری شده‌اند. این مثلثها را طوری روی هم چیده‌ایم که منشوری مثلثی به‌وجود آمده است. آیا ممکن است که مجموع عددهای روی هر یک از یالهای این منشور برابر با ۵۵ باشد؟
۹۵. آیا می‌توان ۱۵ عدد صحیح را دور دایره‌ای طوری چید که مجموع هر چهار عدد متوالی یا برابر با ۱ باشد یا برابر با ۳؟

*۹۶. هزار عدد طبیعی پیدا کنید که مجموعشان برابر با حاصل‌ضربشان باشد.

۹۷. رقمهای دو عدد $۲^{۱۹۸۹}$ و $۵^{۱۹۸۹}$ پشت سر هم نوشته شده‌اند. درکل چند رقم نوشته شده است؟

۹۸. یک بلیت اتوبوس را (که در روسیه شماره‌اش از ۶ رقم دلخواه تشکیل می‌شود) در صورتی «خوش‌یمن» می‌نامند که مجموع سه رقم اولش با مجموع سه رقم آخرش برابر باشد. ثابت کنید تعداد بلیتهای «خوش‌یمن» برابر با تعداد بلیتهایی است که مجموع رقمهایشان ۲۷ است.

۵. مسأله‌های گوناگون

۹۹. درکلاسی چهارده دانش‌آموز اسپانیایی می‌خوانند و هشت دانش‌آموز فرانسه. در ضمن، می‌دانیم سه دانش‌آموز هر دو زبان را می‌خوانند. اگر هر یک از دانش‌آموزان دست‌کم یک زبان را بخواند، چند دانش‌آموز در این کلاس وجود دارد؟

۱۰۰. نقطه‌های صفحه را با دو رنگ رنگ می‌کنیم. ثابت کنید دو نقطهٔ همرنگ وجود دارند که فاصله‌شان از هم دقیقاً ۱ متر است.

۱۰۱. خطی راست را با دو رنگ رنگ می‌کنیم. ثابت کنید می‌توانیم روی این خط پاره‌خطی پیدا کنیم که طولش صفر نباشد و دو سر و وسطش همرنگ باشند.

۱۰۲. مربعی ۸×۸ از دومینوهای ۲×۱ تشکیل شده است. ثابت کنید دو تا از این دومینوها مربعی ۲×۲ تشکیل می‌دهند.

۱۰۳. در همهٔ خانه‌های جدولی ۳×۳ عدد گذاشته شده است. می‌توانیم به همهٔ عددهای هر مربع ۲×۲ در این جدول عدد ۱ را اضافه کنیم. آیا می‌توان با استفاده از این عملها از جدولی که همهٔ درایه‌هایش صفرند جدول شکل ۶۲ را به‌دست آورد؟

۴	۹	۵
۱۰	۱۸	۱۲
۶	۱۳	۷

شکل ۶۲

۱۰۴. اتوبوس را در صورتی پرازدحام می‌نامیم که از ۵۰٪ حداکثر تعداد مجاز مسافر بیشتر سوار کرده باشد. بچه‌ها برای رفتن به اردویی تابستانی سوار چند تا اتوبوس می‌شوند. کدام‌یک بزرگتر است: درصد اتوبوسهای پرازدحام یا درصد بچه‌هایی که سوار اتوبوسهای پرازدحام شده‌اند؟

۱۰۵. برگه‌های مسأله‌های المپیاد کشوری در پایه‌های ۶ تا ۱۱ طوری تنظیم شده‌اند که هر یک از برگه‌ها شامل هشت سؤال است و در میان سؤالهای هر پایه دقیقاً سه سؤال وجود دارد که در المپیاد پایه‌های دیگر نیامده است. کمیتهٔ برگزارکننده حداکثر از چند سؤال استفاده کرده است؟

۱۰۶. همهٔ دانش‌آموزان مدرسه‌ای در آرایه‌ای مستطیلی ایستاده‌اند. قدبلندترین دانش‌آموز هر سطر انتخاب می‌شود که در میان اینها جان اسمیت از همه قدکوتاهتر است. بعد در هر ستون قدکوتاهترین دانش‌آموز انتخاب می‌شود که در میان آنها جو براون از همه قدبلندتر است. چه کسی قدبلندتر است: جان یا جو؟

۱۰۷. سی صندلی در یک ردیف قرار دارند. هر چند وقت یک‌بار یک نفر می‌آید و روی یکی از صندلیهای خالی می‌نشیند. بعد، اگر دو صندلی پهلوییِ این شخص پر باشند یکی از بغل دستیهایش از جای خود بلند می‌شود و صندلیش را ترک می‌کند.

به‌شرطی که در ابتدا

الف) همهٔ صندلیها خالی باشند؛

ب) ده صندلی پر باشند،

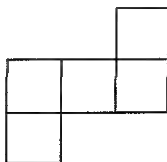
حداکثر چند صندلی ممکن است همزمان پر باشند؟

۱۰۸. سه مهرهٔ سرباز در رأسهای پنج‌ضلعی‌ای گذاشته شده‌اند. می‌توان سربازها را روی هر قطر پنج‌ضلعی به هر یک از رأسهای خالی برد. آیا ممکن است که بعد از انجام چند حرکت از این دست یکی از این سربازها در جای اولیه‌اش قرار گیرد، اما دو تای دیگر جایشان عوض شده باشد؟

۱۰۹. هیچ‌یک از عددهای a، b، c، d، e و f صفر نیست. ثابت کنید در میان عددهای ab، cd، ef، $-ac$، $-be$ و $-df$ هم عدد مثبت وجود دارد هم عدد منفی.

*۱۱۰. پرفسور روبیک مکعب ۳ × ۳ × ۳ معروفش را با تبر تکه‌تکه می‌کند. اگر در میان ضربه‌های تبر بتواند بعضی از تکه‌ها را روی تکه‌های دیگر بگذارد، دست‌کم چند ضربه لازم است تا این مکعب به ۲۷ مکعب کوچک تقسیم شود؟

۱۱۱. خانه‌های یک برگ کاغذ شطرنجی با هشت رنگ رنگ شده‌اند. ثابت کنید که در این کاغذ شطرنجی می‌توان شکلی مانند شکل ۶۳ یافت که شامل دو خانهٔ همرنگ باشد.



شکل ۶۳

۱۱۲. عددی شش رقمی داده شده است. چند عدد هفت رقمی وجود دارد که اگر یک رقم آنها را خط بزنیم عدد شش‌رقمی موردنظر به‌دست می‌آید؟

۱۱۳. چند بلیت اتوبوس باید پشت سرهم بخرید تا مطمئن شوید که یک بلیت «خوش‌یمن» به‌دست آورده‌اید؟ (تعریف بلیت «خوش‌یمن» را می‌توانید در مسألهٔ ۹۸ ببینید. شماره‌های بلیتهای اتوبوس متوالی‌اند و بعد از بلیت شمارهٔ ۹۹۹۹۹۹ بلیت شمارهٔ ۰۰۰۰۰۰ می‌آید).

*۱۱۴. چندی پیش یک دورهٔ مسابقات والیبال برگزار شد که در آن هر تیم با هر تیم دیگر دقیقاً یک بار بازی کرد. در صورتی می‌گوییم تیم A از تیم B بهتر است که یا A، B را شکست داده باشد یا A تیمی مانند C را شکست داده باشد و C، B را. ثابت کنید که تیم قهرمان این مسابقات از هر تیم دیگر بهتر بوده است.

*۱۱۵. از یک برگ کاغذ شطرنج مستطیلی ۳۰ × ۲۰ می‌بریم. آیا می‌توان خطی راست رسم کرد که از درون ۳۰ تا از خانه‌های این مستطیل بگذرد؟

۱۱۶. عددهای طبیعی از ۱ تا ۶۴ در خانه‌های صفحهٔ شطرنجی نوشته شده‌اند و در ضمن هر عدد دقیقاً یک‌بار نوشته شده است. ثابت کنید که اختلاف عددهای دو تا از خانه‌های پهلوی هم دست‌کم ۵ است.

فصل ۹

استقرا

ای. س. روبانُف

۱. روند و روش استقرا

(مقدمه‌ای برای معلمان). به ندرت می‌توان کسی را یافت که حتی یک بار هم سرگرمی چیدن دومینوها پشت سر هم و به‌راه انداختن موج را تجربه نکرده باشد. نخستین دومینو را هل می‌دهید و این دومینو، دومی را می‌اندازد، دومی، سومی را می‌اندازد و به‌همین ترتیب تا وقتی که همهٔ دومینوها بیفتد. اکنون مجموعهٔ دومینوها را با زنجیره‌ای نامتناهی از حکمهای $P_۱$، $P_۲$، $P_۳$، ...، که با عددهای طبیعی شماره‌گذاری شده‌اند، عوض می‌کنیم. فرض کنید بتوانیم ثابت کنیم که

(پایه): نخستین حکم این زنجیره درست است؛

(گام): از درستی هر حکم در این زنجیره درستی حکم بعدی نتیجه می‌شود.

در این صورت، در حقیقت همهٔ حکمهای این زنجیره را ثابت کرده‌ایم. در حقیقت، می‌توانیم «نخستین دومینو را هل دهیم» یعنی حکم اول (پایه) را ثابت کنیم و بعد حکم (گام) یعنی اینکه هر دومینو هنگام افتادن دومینوی بعدی را می‌اندازد. هر «دومینویی» (حکمی) که انتخاب کنیم دیر یا زود این موج «افتادن دومینوها» (اثباتها) به آن برخورد می‌کند.

آنچه گفته شد توصیف روش استقرای ریاضی است. قضیهٔ (پایه) را پایهٔ استقرا و قضیهٔ گام را گام استقرایی می‌نامند. از آنچه دربارهٔ موج افتادن دومینوها گفتیم معلوم می‌شود که مرحلهٔ (گام) چیزی نیست بجز شکل کوتاه شده‌ای از زنجیرهٔ قضیه‌هایی که در زیر نشان داده شده‌اند:

$$P_۱ \to P_۲ \to P_۳ \to \cdots \to P_k \to P_{k+۱} \to \cdots$$

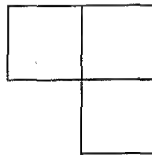
قضیه‌های این زنجیره را «گامهای استقرا» و فرایند پشت سر هم ثابت کردن آنها را «روند استقرا»

می‌نامیم. این فرایند را می‌توان به شکل موجی از اثباتها در طول زنجیره‌ای از قضیه‌ها که از یک حکم به حکمی دیگر می‌رود مجسم کرد.

از لحاظ روانشناسی ماهیت استقرا در روندی که گفتیم نهفته است. اما چطور می‌توانیم این را به دانش‌آموزان بیاموزیم؟ سعی می‌کنیم در قالب گفتگویی میان معلم و دانش‌آموز که کمابیش شبیه فضای یک جلسهٔ محفل ریاضی واقعی است به شما نشان دهیم که چه کار باید کرد. در پایان این گفتگو چند توضیح روش شناختی برای معلمان آورده‌ایم (ارجاعهای این توضیحات را در متن گفتگو نشان داده‌ایم).

* * *

مسألهٔ ۱. معلم: یکی از خانه‌های کاغذی شطرنجی به ابعاد ۱۶ × ۱۶ را حذف کرده‌ایم. ثابت کنید شکل حاصل را می‌توان به تعدادی از یک نوع سه‌مربعی به نام «کُنج» (شکل ۶۴ را ببینید) تقسیم کرد.



شکل ۶۴

دانش‌آموز: اینکه آسان است؛ هر «کنج» سه خانه دارد و ۱ − ۱۶^۲ بر ۳ بخش‌پذیر است.

معلم: اگر موضوع به این سادگیهاست، آیا می‌توانید نواری ۶ × ۱ را هم به «کنجها» تقسیم کنید؟ عدد ۶ هم که بر ۳ بخش‌پذیر است!

دانش‌آموز: بسیار خب . . . اشتباه کردم. اصلاً نمی‌دانم که این مسأله را چطور باید حل کرد.(۱)

معلم: خب، نمی‌توانید این مسأله را حل کنید. آیا امکان دارد که مسألهٔ دیگری را در نظر بگیرید که شبیه همین باشد و در عین حال آسانتر؟

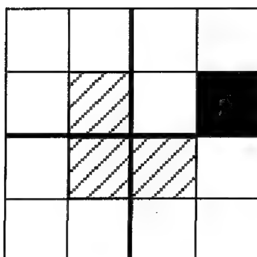
دانش‌آموز: خب، می‌توانیم مربع دیگری را در نظر بگیریم که اندازه‌اش کوچکتر باشد، مثلاً ۴ × ۴.

معلم: مربعی ۲ × ۲ را نمی‌توانیم در نظر بگیریم؟(۲)

دانش‌آموز: آخر در این حالت دیگر چیزی وجود ندارد که ثابت کنیم؛ چون وقتی یکی از خانه‌هایش را حذف می‌کنیم چیزی بجز یک «کنج» نمی‌ماند. حالا آیا از این چیزی می‌فهمیم؟

معلم: اکنون سعی کنید که مسأله را در مورد مربع ۴ × ۴ حل کنید.

دانش‌آموز: آهان. هر مربع ۴ × ۴ را می‌توان به چهار مربع ۲ × ۲ تقسیم کرد. معلوم است با مربعی که شامل خانهٔ حذف شده است چه کار باید کرد. اما در مورد سه‌تای دیگر چه کنیم؟



شکل ۶۵

معلم: سعی کنید از آنها «کنجی» را درآورید که در مرکز مربع بزرگ قرار گرفته است (شکل ۶۵ را ببینید).

دانش‌آموز: فهمیدم! از هر یک از اینها می‌توان یک خانه را در نظر گرفت تا به یک «کنج» تبدیل شود. بنابراین می‌توانیم مسأله را در مورد مربعهای ۴ × ۴ هم حل کنیم. حالا چی؟

معلم: مربعی ۸ × ۸ را درنظر می‌گیریم. می‌توان آن را به چهار مربع ۴ × ۴ تقسیم کرد. از این استفاده کنید.

دانش‌آموز: خیلی خب، می‌توانیم مانند قبل استدلال کنیم. یکی از این مربعها شامل خانهٔ «حذف شده» است. همان‌طور که پیش از این ثابت کردیم این مربع را می‌توان به «کنجها» تقسیم کرد. بعد از اینکه از مرکز مربع ۸ × ۸ یک «کنج» درمی‌آوریم، هر یک از سه مربع دیگر یک خانه کم دارد و در نتیجه آنها را هم می‌توانیم به «کنجها» تقسیم کنیم.

معلم: حالا فهمیدید که مسألهٔ اصلی را چطور باید حل کرد؟

دانش‌آموز: البته. مربع ۱۶ × ۱۶ را به چهار مربع ۸ × ۸ تقسیم می‌کنیم. یکی از اینها شامل خانه حذف شده است. همین الان ثابت کردیم که می‌توان آن را به «کنجها» تقسیم کرد، درست است؟ بعد، از مرکز مربع بزرگ یک «کنج» درمی‌آوریم تا سه مربع ۸ × ۸ دیگر به‌دست آید که هریک از آنها یک خانه ندارد و از این رو هر یک را می‌توان به «کنجها» تقسیم کرد. کار تمام است!

معلم: نه هنوز. این مسأله را با ایجاد «پلهایی» که سؤالهای مشابه و در عین حال ساده‌تر را به هم وصل می‌کرد حل کردیم. آیا می‌توانیم چنین پلهایی را باز در مورد سؤالهای پیچیده‌تر دیگر ایجاد کنیم؟(۳)

دانش‌آموز: البته که می‌توانیم. مثلاً ثابت می‌کنیم که می‌توان مربعی ۳۲ × ۳۲ را به «کنجها» تقسیم کرد. مجسم کنید که همین الان آن را به چهار مربع ۱۶ × ۱۶ تقسیم کرده‌ایم و . . . .

معلم: کار تمام است! اما . . . آیا ممکن است که باز هم ادامه دهیم؟

دانش‌آموز: البته. با ثابت شدن حکم در مورد مربعی ۳۲ × ۳۲ اکنون می‌توانیم درست به همان طریق روشی برای تقسیم کردن مربعی ۶۴ × ۶۴ به‌دست بیاوریم، بعد برای مربعی ۱۲۸ × ۱۲۸ و همین‌طور در مورد . . . .

معلم: بنابراین زنجیره‌ای نامتناهی از حکمها در مورد مربعهایی از اندازه‌های مختلف به‌دست می‌آید. آیا می‌توانیم بگوییم که همه‌شان را ثابت کرده‌ایم؟

دانش‌آموز: بله، همهٔ آنها را ثابت کرده‌ایم. ابتدا نخستین حکم این زنجیره را، که در مورد مربع ۲ × ۲ بود، ثابت کردیم. بعد، از آن، دومین حکم را نتیجه گرفتیم، بعد از دومی، سومی را و همین‌طور تا آخر. به‌نظر می‌رسد کاملاً روشن باشد که

وقتی در این زنجیره پیش می‌رویم، دیر یا زود به هر یک از حکمهایش می‌رسیم؛ بنابراین، همهٔ آنها درست‌اند.

معلم: بسیار خب. این فرایند عین «موج اثبات» است که در طول این زنجیرهٔ قضیه‌ها جلو می‌رود

$$۲ \times ۲ \to ۴ \times ۴ \to ۸ \times ۸ \to \cdots$$

کاملاً واضح است که هیچ‌یک از حکمهای این زنجیره از این موج قسر در نمی‌رود.

* * *

یادداشت. در این گفتگو آوردن چند توضیح لازم است.

توضیح ۱. وقتی این دانش‌آموز حکم مسأله را با استفاده از بخش‌پذیری بر ۳ «ثابت کرد»، معلم با مشکلی مواجه شد که نوعاً در کلاسها پیش می‌آید و آن اینکه چطور می‌توان ماهیت این اشتباه را توضیح داد بی‌آنکه راه‌حل مسأله زیادی لو داده شود. معلم با ارائهٔ مثال نقضی که از پیش آماده کرده بود بر این مشکل غلبه کرد. خوب است که همیشه از وجود موانعی از این دست آگاه باشیم و راههایی را بلد باشیم که بتوانیم به موقع از این موانع بگریزیم. این کار باید به‌راحتی و بدون هیچ انحراف عمده‌ای از روند راه‌حل صورت گیرد.

توضیح ۲. پاسخ دانش‌آموزان به این سؤال چندان هم غیرمنتظره نیست. دانش‌آموزان حالت ۲ × ۲ را موردی مهم به حساب نمی‌آورند، که اصلاً ایرادی ندارد (بعدها چندین بار با این وضعیت مواجه خواهیم شد). به هر حال، معلم می‌داند که برای شروع حل مسأله این حالت از همه آسانتر است.

توضیح ۳. در این بخش از گفتگو منظورمان از ایجاد پلها طرح «گام به گام» زیر است:

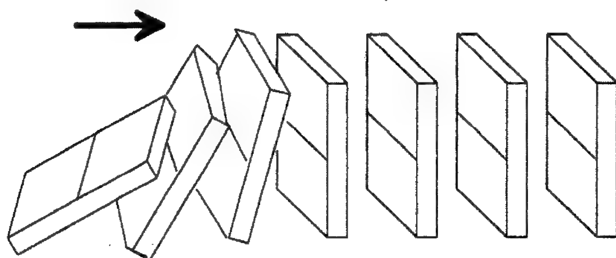
$$۲ \times ۲ \to ۴ \times ۴ \to ۸ \times ۸ \to ۱۶ \times ۱۶$$

این آغاز روند استقراست: پایهٔ استقرا، یعنی حالت ۲ × ۲، و سه گام نخست استقرا. در اینجا ضروری است که تعدادی کافی از گامهای استقرا را بیاوریم تا دانش‌آموزان متوجه شباهت آنها شوند. اکنون، بعد از این راهنمایی دانش‌آموز می‌تواند کل روند استقرایی را به‌پیش ببرد.

در حقیقت راه‌حلهای استقرایی دیگری هم برای این مسأله وجود دارند، اما از نظر آموزشی هیچ حسنی ندارند، زیرا مفهوم استقرا در آنها به روشنی راه‌حل بالا نیست. بنابراین معلم باید دانش‌آموزان را

با استفاده از راهنماییهای دستورالعملی از این راه‌حلها دور کند. به این ترتیب در اینجا هم معلم نقشش را کاملاً ایفا می‌کند: بعضی وقتها او دانش‌آموزان را از شباهتی گمراه‌کننده دور می‌کند و کمک می‌کند تا توان فکری آنان هرز نرود. بسیار مهم است که به آنها مجال دهیم تا مسأله را حل کنند: دانش‌آموزان هر چه بیشتر بدون کمک دیگران این کار را انجام دهند بهتر است.

آنچه را که به‌دست آمده است جمع‌بندی می‌کنیم. دانش‌آموز طرح روش استقرای ریاضی را شرح داد (اما بیشتر مواقع این کار وظیفهٔ معلم است). جملهٔ «وقتی در این زنجیره جلو می‌رویم، دیر یا زود به هر یک از حکمهایش می‌رسیم» چیزی نیست بجز صورتی غیررسمی از اصل استقرای ریاضی که اساس روش استقرای ریاضی است. با همهٔ این احوال باید بگوییم که صحبت کردن دربارهٔ این طرح، آن هم در همان ابتدای بحث خیلی منطقی نیست. این کار ممکن است پیش از موقع یا حتی مضر باشد، زیرا بیان کردن رسمی این حکم که از نظر شهودی واضح است ممکن است باعث احساس بدفهمی و شک و تردید شود. برعکس باید از همهٔ راهها استفاده کرد تا این طرح تا آنجا که ممکن است واضح و روشن شود. علاوه بر «موج» و دومینوها (شکل ۶۶ را ببینید) تشبیه‌های مفید دیگری از جمله بالا رفتن از پلکان، بستن زیپ و غیره وجود دارند.



شکل ۶۶

* * *

اکنون به گفتگویمان ادامه می‌دهیم:

معلم: بنابراین زنجیره‌ای نامتناهی از حکمها دربارهٔ امکان تقسیم مربعها به «کنجها» را ثابت کرده‌ایم. اکنون همهٔ آنها را بی‌آنکه از عبارت «و همین‌طور تا آخر» استفاده کنیم می‌نویسیم.

دانش‌آموز: اما ... به‌طور قطع برای این کار همیشه کاغذ کم می‌آوریم.

معلم: بله، اگر هر حکم را جداگانه بنویسیم، همین‌طور می‌شود. اما همهٔ این حکمها شبیه هم‌اند و فقط اندازهٔ مربعها در آنها فرق می‌کند. بر این اساس می‌توانیم کل زنجیره را فقط در یک خط این‌طور بنویسیم:

$(*)$ می‌توان هر مربع $2^n \times 2^n$ را که یک خانه‌اش حذف شده است به «کنجها» تقسیم کرد.

در اینجا متغیر n آمده است. هر حکم زنجیره‌مان را می‌توان از جایگزینی عددی به جای n به‌دست آورد. مثلاً، در حالتی که $n = ۵$، حکمی از زنجیره که در مورد مربع ۳۲ × ۳۲ است، به‌دست می‌آید. در این صورت دهمین حکم زنجیره چیست؟

دانش‌آموز: در حکم بالا قرار می‌دهیم $n = ۱۰$ تا حکم مربوط به مربع $۲^{۱۰} \times ۲^{۱۰}$ یعنی مربع ۱۰۲۴ × ۱۰۲۴ به‌دست آید.

معلم: به این نکته توجه کنید: متغیر همان چیز مشترک است، که البته بسیار مؤثر است، زیرا با استفاده از آن می‌توانیم زنجیره‌ای نامتناهی را در یک جملهٔ کوتاه جمع کنیم. با این حساب بگویید که «متغیر» چیست؟

دانش‌آموز: خب ... متغیر فقط یک حرف است ... یک مجهول ...

معلم: به‌خاطر داشته باشید: این «حرف» نشان‌دهندهٔ فضایی خالی، مانند یک اتاق، است که در آن می‌توانید عددها یا چیزهایی مختلف را بگذارید. می‌توان آن را «جایبان» هم نامید. آن دسته از عددها یا چیزهایی را که می‌توان در این «اتاق» گذاشت مقدارهای ممکن متغیر می‌نامند. مثلاً مقدارهای متغیر n در حکم (*) عددهای طبیعی (عددهای صحیح مثبت) هستند. به‌همین علت حکم (*) جایگزین زنجیرهٔ نامتناهی حکمها می‌شود.

اکنون به اثبات زنجیرهٔ نامتناهی (*) باز می‌گردیم. حکمها را شماره‌گذاری می‌کنیم: $P_۱$ حکم مربوط به مربع ۲ × ۲ است. $P_۲$ دربارهٔ مربع ۴ × ۴ است و همین‌طور تا آخر.

ابتدا حکم $P_۱$ را ثابت کردیم. بعد به زنجیرهٔ نامتناهی قضیه‌های شبیه به هم پرداختیم: اگر $P_۱$ ثابت شود، آن‌وقت $P_۲$ درست است؛ اگر $P_۲$ ثابت شود، آن‌وقت $P_۳$ درست است و به‌همین ترتیب تا آخر. اکنون ببینیم می‌توانیم این زنجیره را هم به‌شکلی خلاصه بنویسیم: «به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n ...

دانش‌آموز: ... اگر P_n درست باشد، آن‌وقت $P_{n+۱}$ هم درست است.»

معلم: اکنون لطفاً این عبارت را شرح دهید؛ منظور از P_n و $P_{n+۱}$ چیست؟

دانش‌آموز:

(**) «عدد طبیعی n هر چه باشد، اگر قبلاً ثابت شده باشد که می‌توان مربعی $۲^n \times ۲^n$ را که یک خانه‌اش حذف شده است به «کنجها» تقسیم کرد، آن‌وقت این هم درست است که می‌توان مربعی $۲^{n+۱} \times ۲^{n+۱}$ را که یک خانه‌اش حذف شده است به «کنجها» تقسیم کرد.»

معلم: آیا می‌توانید این را ثابت کنید؟

دانش‌آموز: فکر می‌کنم بتوانم. مجسم کنید که مربع $۲^{n+۱} \times ۲^{n+۱}$ را به چهار مربع $۲^n \times ۲^n$ تقسیم کنیم. یکی از اینها یک خانه‌اش کم است و بنابر فرض می‌توان آن را به «کنجها» تقسیم کرد. بعد از مرکز مربع بزرگ یک «کنج» طوری درمی‌آوریم که شامل یک خانه از هر یک از سه مربع $۲^n \times ۲^n$ دیگر باشد. پس از آن باز می‌توانیم از فرض استفاده کنیم!

معلم: کاملاً درست است. توجه کنید که به محض اینکه قضیهٔ کلی (**) را ثابت کردید در واقع همهٔ قضیه‌های این زنجیره را هم که با حکم (**) بیان شده‌اند، ثابت کرده‌اید. مثلاً، اگر ۱ = n، همان اثبات اوایل فصل به‌دست می‌آید، که از امکان تقسیم کردن مربع ۲ × ۲ امکان تقسیم کردن مربع ۴ × ۴ نتیجه می‌شود. بنابراین درست همان‌طور که (**) را می‌توان به نوعی کل زنجیرهٔ قضیه‌ها دانست، روش استدلالتان را هم می‌توان به‌نوعی کل «موج اثباتهای» آن قضیه‌ها به‌حساب آورد. گمان می‌کنم شما هم به این نتیجه رسیده باشید: اثبات زنجیره‌ای از قضیه‌های شبیه به‌هم به این شکل فشرده سودمندتر و آسانتر است. اما برای این کار باید یاد بگیرید که چطور زنجیره‌ای از قضیه‌ها را به این شکل بیان کنید.

* * *

روشی که در حل مسألهٔ ۱ به‌کار بردیم چیزی است که آن را **روش استقرای ریاضی** می‌نامند. اما ماهیت این روش چیست؟

اولاً حکم (*) را در نظر می‌گیریم، منتها نه به‌عنوان یک حکم، بلکه به‌عنوان زنجیره‌ای نامتناهی از حکمهای شبیه به‌هم.

ثانیاً، نخستین حکم این زنجیره را، که آن را «پایهٔ استقرا» می‌نامند، ثابت می‌کنیم.

ثالثاً، حکم دوم را از اولی نتیجه می‌گیریم، سومی را از دومی (به‌همان طریق) و همین‌طور تا آخر. این، «گام استقرایی» است و حکم (**) چیزی بجز شکل کوتاه شدهٔ (فشرده) آن نیست. اکنون چون می‌توانیم از پایهٔ استقرا گام به گام به هر یک از حکمها برسیم، همهٔ آنها درست‌اند.

* * *

«روش ایده‌ای است که (دست‌کم) دو بار از آن استفاده شده باشد»

(جورج پولیا)

برای اینکه روش استقرای ریاضی را به‌خوبی فرا بگیرید، معمولاً لازم است گفتگوی بالا را در مورد چند مسألهٔ مختلف برای خودتان تکرار کنید. اکنون به چهار «مسألهٔ کلیدی» دیگر توجه کنید.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید عدد ۱۱۱۰۰۰۱۱ (۲۴۳ تا یک) بر ۲۴۳ بخش‌پذیر است.

راهنمایی: این مسأله را می‌توان به این حکم تعمیم داد که هر عدد که با 3^n تا یک نوشته می‌شود بر 3^n بخش‌پذیر است.

پایهٔ استقرا: ۱۱۱ بر ۳ بخش‌پذیر است. دانش‌آموزان غالباً با این گزاره استقرا را شروع می‌کنند که ۱۱۱، ۱۱۱، ۱۱۱ بر ۹ بخش‌پذیر است؛ پایه‌ای که ما در نظر گرفتیم برایشان زیادی آسان است.

در اینجا دو مانع سر راهمان است.

الف) تلاش دانش‌آموزان برای تعمیم آزمونهای بخش‌پذیری بر ۳ و ۹، و به‌کارگیری «آزمونی» نادرست برای بخش‌پذیری بر ۲۷؛

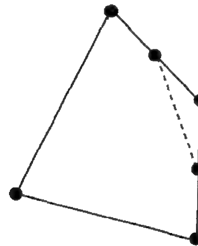
ب) این‌طور استدلال کردن: «اگر عددی بر ۳ و ۹ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت بر ۹ × ۳ یا ۲۷ بخش‌پذیر است.»

در اینجا شکل درست گام استقرایی این است که عددی را که با $۳^{n+۱}$ تا یک نوشته می‌شود بر عددی که با ۳^n تا یک نوشته می‌شود تقسیم کنیم و بررسی کنیم که عدد حاصل مضربی از ۳ است.

مسألهٔ ۳. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی و بزرگتر از ۳ مانند n، nضلعی محدبی وجود دارد که دقیقاً سه زاویه‌اش حاده است.

توضیح. این سؤال مسألهٔ کلیدی تمام و کمالی است، به شرطی که دانش‌آموزان از پیش بدانند که هر چندضلعی محدب بیش از سه زاویهٔ حاده ندارد. در مورد پایهٔ استقرا، یعنی وقتی‌که $n = ۴$، می‌توان چهارضلعی موردنظر را مستقیماً رسم کرد و درستی حکم را بررسی کرد.

گام استقرایی: ضلعهای یکی از زاویه‌هایی را که حاده نیست «می‌بُریم». دراین صورت تعداد زاویه‌های چندضلعی موردنظر یکی زیاد می‌شود و همهٔ زاویه‌های حاده هم حفظ می‌شوند (شکل ۶۷ را ببینید).



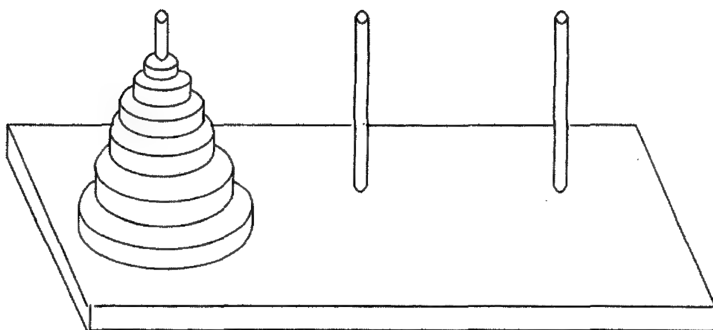
شکل ۶۷

راه دیگرش، ساختن زاویه‌ای جدید روی یکی از ضلعها، کمی دشوارتر است. راه‌حلهای دیگری هم وجود دارند (با استفاده از چندضلعیهای محاطی و غیره) اما دقیق درآوردن بیشترشان برای دانش‌آموزان از این یکی که گفتیم دشوارتر است. امکان دارد که در اینجا معلم حتی بتواند در مورد «بریدن» ضلعهای زاویه دانش‌آموزان را راهنمایی کند.

روشن است که حکم مسأله در حالتی که $n = ۳$ درست است. اما با شروع استقرا از عدد ۳ چیزی به‌دست نمی‌آوریم، زیرا روشی که به‌کار گرفتیم در گام استقرایی از $n = ۳$ به $n = ۴$ به‌کار نمی‌آید.

سومین مسأله‌مان نمونه‌ای از ساختن چیزی به استقراست.

مسألهٔ ۴. («برج هانوی») پیتر اسباب‌بازی بچه‌گانه‌ای دارد. این اسباب‌بازی سه میله دارد که روی پایه‌ای قرارگرفته‌اند و n تا حلقه روی یکی از آنها وجود دارد. این حلقه‌ها به‌ترتیب اندازه‌شان چیده شده‌اند



شکل ۶۸

(شکل ۶۸ را ببینید). می‌توان هر بار حلقهٔ رویی (کوچکترین حلقهٔ) هر میله را به میلهٔ دیگر منتقل کرد، منتها هیچ‌وقت نباید حلقه‌ای بزرگتر روی حلقه‌ای کوچکتر گذاشته شود. ثابت کنید

الف) می‌توان همهٔ این حلقه‌ها را به یکی از میله‌های خالی منتقل کرد؛

ب) پیتر می‌تواند این کار را با $۲^n - ۱$ حرکت انجام دهد؛

ج)* انجام این کار با کمتر از این تعداد حرکت ممکن نیست.

راهنمایی الف و ب): اثبات درستی حکم در مورد پایهٔ استقرا ($n = ۱$) آسان است.

گام استقرایی: فرض کنید $n = k + ۱$ و n حلقه روی میلهٔ اولی وجود داشته باشد. بنابر فرض استقرایی می‌توانیم همه حلقه‌ها بجز بزرگترینشان را با $۲^k - ۱$ حرکت به میلهٔ سوم منتقل کنیم. بعد حلقهٔ باقی‌مانده را به میلهٔ دوم می‌بریم. پس از آن می‌توانیم همهٔ حلقه‌های میلهٔ سوم را با $۲^k - ۱$ حرکت به میلهٔ دوم منتقل کنیم. درکل تعداد حرکتهایمان برابر با

$$(۲^k - ۱) + ۱ + (۲^k - ۱)$$

یا $۲^{k+۱} - ۱$ است. خوب است که چند گام نخست استقرا را «به‌طور عملی»، حتی با استفاده از نمونه‌ای واقعی، انجام دهید.

ج) در مورد این قسمت از مسأله باید با دقت عمل کرد، زیرا از دیگر مسأله‌هایی که در اینجا آمده‌اند دشوارتر است. ایدهٔ اصلی اثبات این است که برای انتقال پهنترین حلقه به میلهٔ دوم باید ابتدا همهٔ حلقه‌های دیگر را به میلهٔ سوم منتقل کنیم.

مسألهٔ ۵. چند خط راست صفحه را به ناحیه‌هایی تقسیم کرده‌اند. ثابت کنید می‌توان این ناحیه‌ها را با دو رنگ طوری رنگ‌آمیزی کرد که هر دو ناحیهٔ مجاور به رنگهای مختلف باشند (دو ناحیه را در صورتی مجاور می‌نامیم که دست‌کم در یک پاره‌خط مشترک باشند).

راهنمایی: در اینجا با مانع دیگری مواجه می‌شویم: در این حکم برای اینکه بتوانیم از استقرا استفاده کنیم هیچ متغیری به‌طور آشکار نیامده است. بنابراین برای حل کردن مسأله ابتدا این متغیر پنهانی را

پیدا می‌کنیم. به این منظور، صورت مسأله را این‌طور می‌نویسیم: «در صفحه‌ای n تا خط راست وجود دارند . . . .» اکنون پایهٔ استقرا را می‌توان حالتهای ۱ $= n$ یا ۲ $= n$ اختیارکرد (کارمان با هریک از اینها راه می‌افتد). گام استقرایی: چند لحظه $(k+1)$امین خط را بردارید، نقشهٔ حاصل را رنگ کنید، بعد خطِ برداشته شده را به جای خود برگردانید و رنگ همهٔ ناحیه‌های یک طرف این خط را برعکس کنید.

توصیه به معلمان. این چند مسألهٔ کلیدی اول را هم می‌توان طبق طرح گفتگوی بالا بررسی کرد؛ یعنی، گسترش دادن زنجیرهٔ موردنظر از حکمی خاص. دانش‌آموزان باید ماهیت روند استقرایی و ارتباط میان زنجیره‌های قضیه‌ها و حکمها را با استفاده از متغیرهای صحیح درک کنند. اگر دانش‌آموزان برای این کار به‌اندازهٔ کافی آمادگی نداشتند، می‌توان از ایدهٔ ایجاد زنجیرهٔ گامهای استقرایی صرف‌نظر کرد. این ایده را می‌توان بعداً در مرحلهٔ دوم مطرح کرد که هدف از آن این است که به دانش‌آموزان بیاموزیم که روی گام استقرایی به‌شکل اختصاریش کار کنند. در حین این کار خوب است برایشان سؤالهایی به‌شکلی کلی (مانند مسأله‌های ۳ و ۴) مطرح کنید. اکنون زنجیره‌ای از حکمها پیش رویمان است و حل مسأله را می‌توان دقیقاً از «تشریح» صورتش این‌طور آغاز کرد: «در اینجا زنجیره‌ای اختصاری از قضیه‌ها داده شده است. نخستین قضیه‌اش کدام است؟ پنجمی کدام است؟ ۱۹۹۵امی کدام است؟ با این همه، زنجیرهٔ گامهای استقرایی را باید طبق طرح قبلی متناوباً گسترش داد و آن را به‌شکل اختصاری نوشت، تا دانش‌آموزان به این رویه عادت کنند و ارتباط میان زنجیره‌ای طولانی و شکل اختصاریش را خوب بفهمند.

* * *

در اینجا دانش‌آموزان دیگر باید در جمع‌بندی تجربیاتشان در حل مسأله‌های کلیدی بالا

طرح کلی روشنی برای حل مسأله‌ها به روش استقرای ریاضی

پیدا کرده باشند:

۱. در صورت سؤال زنجیره‌ای از حکمهای شبیه هم پیدا کنید. چنانچه متغیرها در صورت مسأله پنهان باشند باید سؤال را جور دیگری صورتبندی کرد تا متغیرها آشکار شوند. اگر در صورت مسأله زنجیره‌ای وجود نداشت، زنجیره‌ای از حکمها را طوری گسترش دهید که سؤال موردنظر بخشی از آن شود.

۲. نخستین حکم (پایهٔ استقرا) را ثابت کنید.

۳. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n از درستی حکم nام درستی حکم $(n+1)$ام نتیجه می‌شود (گام استقرایی).

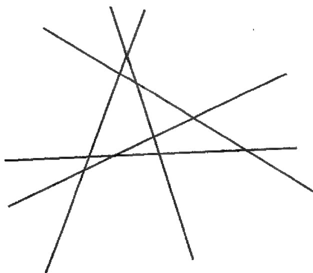
۴. اگر پایهٔ استقرا و گام استقرایی ثابت شوند آن‌وقت همهٔ حکمهای زنجیرهٔ موردنظر هم به‌طور همزمان ثابت می‌شوند، زیرا با حرکت «گام‌به‌گام» از پایهٔ استقرا دیر یا زود به هر یک از آنها می‌رسید.

آخرین مورد در این طرح در همهٔ مسأله‌ها عین هم است و از این‌رو بیشتر وقتها از آن صرف‌نظر می‌شود. با وجود این دانستن آن ضروری است. علاوه بر این، روی نخستین مورد در این طرح هم چندان تأکید نمی‌کنیم، زیرا برای آن دسته از افرادی که به‌روش استقرای ریاضی عادت دارند به‌کارگیری آن کاملاً طبیعی است؛ با این همه توصیه می‌کنیم که دانش‌آموزان دست‌کم تا مدتی به آن کاملاً توجه کنند.

۲. روش استقرای ریاضی و حدس زدن از راه مقایسه

به گفتگویمان ادامه می‌دهیم.

مسألهٔ ۶. n خط راست صفحه را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند، به‌شرطی که هیچ دو تایی از آنها موازی نباشند و هیچ سه تایی از آنها از یک نقطه نگذرند؟ (در شکل ۶۹ مثالی که در آن $n = ۵$ نشان داده شده است.)



شکل ۶۹

دانش‌آموز: سعی می‌کنیم که طرح بالا را دنبال کنیم. آیا در اینجا زنجیره‌ای داریم؟ انگار این‌طور است: یک خط صفحه را به چند ناحیه تقسیم می‌کند؟ دو خط چطور سه خط چطور . . .؟

پایهٔ استقرا معلوم است: یک خط صفحه را به ۲ ناحیه (نیم‌صفحه) تقسیم می‌کند.

معلم: یا هیچ خط، به یک ناحیه.

دانش‌آموز: حالا!. اما مورد سوم. گام استقرایی . . .!؟

معلم: مانعی را که سر راهتان وجود دارد می‌دانم: در اینجا با مشکل تازه‌ای مواجه‌ایم. در مسأله‌های قبلی به زنجیره‌های *حکمها* می‌پرداختیم، نه به زنجیره‌های *سؤالها*. *اما در اینجا هم زنجیره‌ای از حکمها* را به‌دست می‌آوریم، به‌شرطی که پاسخهای احتمالی و ثابت نشدهٔ این سؤالها را پیدا کنیم.

دانش‌آموز: چطور؟

معلم: سعی کنید قاعدهٔ موجود را حدس بزنید، یعنی تابعی پیدا کنید که تعداد ناحیه‌ها را، که آن را با L_n نشان می‌دهیم، برحسب n، تعداد خطها، به‌دست دهد. می‌توانیم آزمایشهایی هم انجام دهیم، یعنی عددهای L_n را به‌ازای مقدارهای کوچک n حساب کنیم. شروع کنید!

دانش‌آموز: خیلی خب. در اینجا $L_۰ = ۱$، $L_۱ = ۲$، $L_۲ = ۴$، $L_۳ = ۷$ و $L_۴ = ۱۱$. باید کمی فکر کنم . . .. آهان، فهمیدم! وقتی خط nام را اضافه می‌کنید تعداد ناحیه‌ها nتا زیاد می‌شود. بنابراین $L_n = ۱ + (۱ + ۲ + \cdots + n)$، کار را تمام کردم!

معلم: نه، هنوز نه. فراموش نکنید که این رابطه را فقط حدس زده‌اید اما آن را ثابت نکرده‌اید. حدستان را فقط به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$ بررسی کرده‌اید. به‌ازای مقدارهای دیگر این رابطه چیزی نیست بجز حدسی براساس این حدستان که با افزودن خط nام تعداد ناحیه‌ها nتا زیاد می‌شود. اگر این حدس اشتباه باشد چه می‌شود؟ تنها تضمین برای درستی آن آوردن اثبات است.

دانش‌آموز: . . . به روش استقرای ریاضی.

معلم: اما باید به طرحمان در بخش ۱ مورد دیگری را هم اضافه کنیم:

۱ الف. اگر در مسأله‌ای ریاضی به‌جای زنجیره‌ای از حکمها زنجیره‌ای از سؤالها وجود داشته باشد، پاسخهای احتمالی‌تان را هم اضافه کنید. می‌توانید این پاسخها را با آزمایش کردن در مورد چند سؤال اول زنجیرهٔ موردنظر حدس بزنید. با وجود این، بعد از اینکه مطمئن شدید که پاسخها درست‌اند فراموش نکنید که باید آنها را با دقت تمام ثابت کنید.

دانش‌آموز: اکنون می‌دانم چطور این کار را تمام کنم. پیش از این پایهٔ استقرا را ثابت کردیم، درست است؟ اثبات گام استقرایی آسان است: خط nام خطهای دیگر را در $n - ۱$ نقطه قطع می‌کند که با این نقطه‌ها خط به n تکه تقسیم می‌شود. بنابراین خط nام nتا از ناحیه‌های قبلی صفحه را به ناحیه‌های جدید تقسیم می‌کند.

* * *

فرایند حدس زدن از راه مقایسه که دانش‌آموزمان الان آن را توضیح داد ابزاری بسیار مؤثر و بعضی وقتها بسیار خطرناک است: دانش‌آموزان وسوسه می‌شوند قاعده‌ای را که پیدا کرده‌اند با اثبات عوضی بگیرند. دو مثال زیر دارویی مؤثر برای این بیماری‌اند.

مسألهٔ ۷. آیا درست است که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n^۲ + n + ۴۱$ عددی اول است.

راهنمایی: پاسخ سؤال منفی است: اگر $n = ۴۰$ آن‌وقت $۴۰^۲ + ۴۰ + ۴۱ = ۴۱^۲$ و اگر $n = ۴۱$، $۴۱^۲ + ۴۱ + ۴۱ = ۴۱ \times ۴۳$. اما اگر کسی سعی کند که پاسخ را با «آزمایش کردن» در مورد مقدارهای کوچک n پیدا کند ممکن است به عکس این نتیجه‌گیری برسد، زیرا مقدارهای این دستور به‌ازای مقدارهای n از ۱ تا ۳۹ عددهایی اول‌اند. این مثال معروف را لئونارد اویلر پیدا کرده است.

مسألهٔ ۸ *. n نقطه روی دایره‌ای انتخاب کرده‌ایم و هر دو تا از آنها را با پاره‌خطی به‌هم وصل کرده‌ایم. در ضمن، هیچ سه تایی از این پاره‌خطها از یک نقطه نمی‌گذرند. این پاره‌خطها درون دایره را به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟

راهنمایی: به‌ازای مقدارهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ از n تعداد ناحیه‌های حاصل به‌ترتیب برابر با ۱، ۲، ۴، ۸ و ۱۶ است. این نتیجه‌ها باعث می‌شوند که برای تعداد ناحیه‌ها دستور $۲^{n-۱}$ را حدس بزنیم. با وجود این، در حقیقت، تعداد ناحیه‌ها برابر است با

$$\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۲۴}+\frac{n(n-۱)}{۲}+۱$$

۳. مسأله‌های مقدماتی کلاسیک

مسأله‌های استقرایی کلاسیک ریاضیات مقدماتی را می‌توان به سه گروه عمده تقسیم کرد: اثبات اتحادها، اثبات نابرابریها و اثبات بخش‌پذیریها.

با وجود اینکه راه‌حل این مسأله‌ها به‌روش استقرای ریاضی کاملاً ساده به‌نظر می‌رسند، دانش‌آموزان هنگام پرداختن به آنها هم با موانع ذهنی مواجه می‌شوند و هم با موانع مربوط به استفاده از این روش این بخش را با بررسی این موارد آغاز می‌کنیم.

معلم: می‌خواهم مسألهٔ ۶ را بیشتر بررسی کنید. آیا می‌خواهید که عبارت $(n+\cdots+۳+۲+۱)+۱$ همین‌طوری در این راه‌حل بیاید؟

دانش‌آموز: نه‌زیاد. این عبارت خیلی گنده است. بهتر است که از شر سه نقطه خلاص شویم.

معلم: چرا نشویم! می‌توانید به روش استقرای ریاضی ثابت کنید که

$$۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

دانش‌آموز: اما ... برای استفاده از روش استقرای ریاضی زنجیره‌ای از حکمها را لازم داریم ...

معلم: دقیقتر نگاه کنید: در این دستور متغیر n وجود دارد. همان‌طور که می‌دانید این نشانهٔ خوبی از وجود مجموعه‌ای اختصاری از مسأله‌هاست. مثلاً به‌جای n عدد ۱۹۹۵ را بگذارید.

دانش‌آموز: در این صورت به‌دست می‌آید

$$۱+۲+\cdots+۱۹۹۵=\frac{۱۹۹۵\times۱۹۹۶}{۲}$$

معلم: یعنی یک برابری عددی برقرار است. مجموعهٔ اختصاری مسأله‌هایمان از این برابریها تشکیل شده است (به‌ازای $n=۱,۲,۳,\ldots,۱۹۹۵$)! اثبات این دستور یعنی ثابت کردن اینکه همهٔ این برابریهای عددی درست‌اند. اگر این کار را انجام بدهیم می‌گوییم که این برابری «به‌ازای همهٔ مقدارهای

قابل‌قبول متغیر درست است» و آن‌را اتحاد می‌نامند. اگر در اتحادی متغیری طبیعی بیاید می‌توانید سعی کنید که آن را به استقرا ثابت کنید.

دانش‌آموز: اگر برابری موردنظر به‌ازای مقداری از n درست نباشد چطور می‌شود؟

معلم: در این صورت آن برابری اتحاد نیست و هرگز نمی‌توانیم آن را ثابت کنیم؛ یا اثبات پایهٔ استقرا به نتیجه نمی‌رسد یا اثبات گام استقرایی. در واقع برای تمایز قائل شدن میان اتحادها و دیگر برابریهای دلخواه که شامل متغیرند باید اتحادها را با عبارتهایی مانند «به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n . . .»، آغاز کرد، اما این روالِ معمول نیست. معمولاً فرض می‌شود که خواننده از متن می‌فهمد که برابری موردنظر اتحاد است یا برابریی شرطی.

دانش‌آموز: خب، از روش استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. پایهٔ استقرا: $n = ۱$. بنابراین باید ثابت کنیم که

$$۱ + ۲ + \cdots + ۱ = \frac{۱ \times ۲}{۲} = ۱?! \ldots$$

معلم: نه، نه. باید ثابت کنیم که $۱ = \frac{۱ \times ۲}{۲}$. عبارت $۱ + ۲ + \cdots + n$ شما را گیج کرده است. این عبارت واقعاً کامل و درست است، اما به‌ازای $n = ۱$، «دنباله»اش، $۲ + \cdots + n$، بی‌معنی است و در حقیقت اصلاً وجود ندارد.

دانش‌آموز: خیلی‌خب، بنابراین درستی پایهٔ استقرا روشن است. برابری دوم این زنجیره را درنظر می‌گیریم. باید ثابت کنیم که $۱ + ۲ = \frac{۲ \times ۳}{۲}$. اما این هم آسان است: $۳ = ۳$. اکنون سومین برابری را در نظر می‌گیریم: $۱ + ۲ + ۳ = \frac{۳ \times ۴}{۲}$. این هم آسان است: $۶ = ۶$. بعد نوبت چهارمین برابری . . . که این هم محاسبهٔ سادهٔ دیگری بیش نیست. بگویید ببینیم اکنون چه کنیم؟ باید هر برابری را مستقیماً بررسی کنیم؟ تاکنون هیچ گامی برنداشته‌ایم!

معلم: سعی کنید گام موردنظر را به‌شکلِ کلیِ اختصاری بنویسید.

دانش‌آموز (بعد از گذشت مدتی): این کار را هم نمی‌توانم انجام دهم.

توصیه به معلمان. برای آن دسته از افرادی که روش استقرای ریاضی را خیلی خوب یاد گرفته‌اند، اثبات اتحادها ممکن است بسیار راحت به نظر برسد. با وجود این، از گفتگوی میان معلم و دانش‌آموز در بالا معلوم می‌شود که اشکالهای دانش‌آموزان دو منشأ دارد. اولاً، دانش‌آموزان اغلب اتحادی را که در آن متغیری طبیعی می‌آید به‌عنوان زنجیره‌ای از حکمها در نظر نمی‌گیرند. احتمالاً به این علت که برابریهای عددی ساده را حکمهایی مستقل به‌حساب نمی‌آورند. بجز این، واقعاً چه چیز جالبی ممکن است در برابری مانند $۱ + ۲ + ۳ = \frac{۳ \times ۴}{۲} = ۶$ وجود داشته باشد؟

ثانیاً، فهمیدن اینکه شکل کلی گام استقرایی چگونه است تقریباً غیرممکن است. در حقیقت، وقتی برابریهای $۱ + ۲ = \frac{۲ \times ۳}{۲}$، $۱ + ۲ + ۳ = \frac{۳ \times ۴}{۲}$ و غیره را بررسی می‌کنید هیچ ارتباطی میان دوتا

از این حکمهای پشت سر هم وجود ندارد و شما فقط آنها را بررسی کرده‌اید.

به‌همین دلیل است که در اینجا اتحادها با وجود سادگی‌شان مسأله‌های کلیدی به‌حساب نمی‌آیند. آغاز کردن فراگیری و یا آموزش استقرای ریاضی از اتحادها مشکل‌ساز خواهد بود (البته این مطلب درمورد دانش‌آموزان بسیار مستعد چندان هم مهم نیست، آنها در هر صورت از پس فراگیری این روش برمی‌آیند). از طرف دیگر، اتحادها برای تمرین بسیار مفیدند زیرا اثباتشان معمولاً کوتاه و روشن است.

معلم: خب، من به شما کمک می‌کنم. مجسم کنید که گامهای استقرا را پشت سر هم دنبال کرده باشیم و موج اثباتها به حکم kام رسیده باشد. این حکم چیست؟

دانش‌آموز: به‌دست می‌آوریم

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \qquad (\#)$$

معلم: دقیقاً. اکنون لطفاً به‌من بگویید که حکم بعدی چیست، یعنی موج اثباتها به کدام حکم هنوز نرسیده است؟

دانش‌آموز: قطعاً حکمی که در آن $n = k + 1$، یعنی

$$1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

معلم: خوب است. این حکم را این‌طور می‌نویسیم:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \qquad (\#\#)$$

اکنون به‌من بگویید که گام بعدی استقرا چیست؟

دانش‌آموز: اینکه واضح است. از حکم $(\#)$، حکم $(\#\#)$ را نتیجه بگیریم.

معلم: فرض کنید یاد گرفتیم که چطور به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، از حکم $(\#)$، حکم $(\#\#)$ را نتیجه بگیریم. در این صورت همهٔ گامهای استقرا را همزمان ثابت کرده‌ایم. بنابراین گام استقرایی‌مان چنین است: به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، از برابری $1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$، برابری $1 + 2 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ نتیجه می‌شود.

به‌عبارت دیگر: برابری $(\#)$ داده شده است و باید حکم $(\#\#)$ را ثابت کنیم (به‌شرطی که k عدد طبیعی دلخواهی باشد). برای آسانتر شدن اثبات طرفهای چپ $(\#)$ و $(\#\#)$ را به‌ترتیب با S_k و S_{k+1} نشان می‌دهیم.

دانش‌آموز: در حکم $(\#\#)$، $S_{k+1} = S_k + (k+1)$ (حالا فهمیدید که چرا معلم جمعوند یکی مانده به آخر را نوشته بود!). اکنون از قبل می‌دانیم که $S_k = \frac{k(k+1)}{2}$. در نتیجه به‌دست می‌آوریم

$$S_{k+1} = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1) = \frac{1}{2}[k(k+1) + 2(k+1)] = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

معلم: ایدهٔ مؤثری را که برای اثبات گام استقرایی به‌کار بردیم همیشه به‌یاد داشته باشید: طرف چپ برابری (##) را برحسب طرف چپ برابری (#) نوشتیم و بعد به‌جای آن طرف راست (#) را قرار دادیم.

توصیه به معلمان. اینجا در مورد اتحادها مشکل دیگری پیش می‌آید. ممکن است برای دانش‌آموزان روشن نباشد که چطور گامها را «برحسب حروف» بیان کنند. معلم در گفتگوی بالا نشان داد که چطور باید بر این مشکل غلبه کرد. این مهم است که او برای نمایش متغیر از حرف دیگری، متمایز از حرف به‌کار رفته در صورت اتحاد، استفاده کرد. موضوع این است که حرف k نقش متغیر را ندارد، بلکه نقش عددی ثابت (ولی دلخواه) را دارد که نشان‌دهندهٔ مکانی است که موج اثبات استقراییمان در لحظهٔ موردنظر به آنجا رسیده است. این حرف بعدها در حکم کلی گام استقرایی نقش متغیر را پیدا می‌کند.

تقریباً در بیشتر موارد متغیرهای صورت حکم وگام استقرایی، هر دو را با یک حرف نشان می‌دهند، و این همان وقتی است که برای بیان قضیهٔ گام استقرایی عبارتهایی مانند «... اکنون به جای n، $n+۱$ را می‌گذاریم» را به‌کار می‌برند. این کار در آغاز فراگیری استقرا به صلاح نیست، زیرا بیشتر دانش‌آموزان را هم از لحاظ ادراکی گیج می‌کند (یافتن زنجیره‌ای از حکمها در صورت گام استقرایی دشوار است) و هم از لحاظ فنی (برای تازه‌کارها گذاشتن $n+۱$ به‌جای n آن‌قدرها آسان نیست).

اکنون می‌توانیم با شخصیتهای گفتگویمان خداحافظی کنیم و به حل کردن مسأله‌ها ادامه دهیم. مسأله‌های ۹ تا ۱۶ دربارهٔ اتحادها هستند که عدد طبیعی n متغیرشان است.

مسألهٔ ۹. ثابت کنید

$$۱+۳+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$$

مسألهٔ ۱۰. ثابت کنید

$$۱^۲+۲^۲+\cdots+n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

مسألهٔ ۱۱. ثابت کنید

$$۱\times ۲+۲\times ۳+\cdots+(n-۱)\times n=\frac{(n-۱)n(n+۱)}{۳}$$

مسألهٔ ۱۲. ثابت کنید

$$\frac{۱}{۱\times ۲}+\frac{۱}{۲\times ۳}+\cdots+\frac{۱}{(n-۱)n}=\frac{n-۱}{n}$$

مسألهٔ ۱۳. ثابت کنید

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}, \qquad x \neq 1$$

مسألهٔ ۱۴. ثابت کنید

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{(a+b)(a+2b)} + \cdots + \frac{1}{(a+(n-1)b)(a+nb)} = \frac{n}{a(a+nb)}$$

که در اینجا a و b عددهایی طبیعی و دلخواه‌اند.

مسألهٔ ۱۵. ثابت کنید

$$\frac{m!}{0!} + \frac{(m+1)!}{1!} + \cdots + \frac{(m+n)!}{n!} = \frac{(m+n+1)!}{n!(m+1)}$$

که در اینجا، $m, n = 0, 1, 2, \cdots$.

مسألهٔ ۱۶. ثابت کنید

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

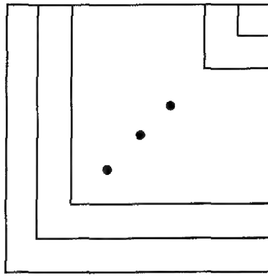
توضیحات. در مسأله‌های ۹ تا ۱۵ اثبات گام استقرایی درست عین اثبات گام استقرایی در گفتگوی بالاست. اما در مسألهٔ ۱۶ می‌توان آن را آسانتر ثابت کرد، به این ترتیب که طرف چپ حکم $(k+1)$ام را نه به‌شکل مجموع، بلکه به‌صورت حاصل‌ضرب طرف چپ حکم kام و $\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ نمایش دهید. این شگرد در اثبات بعضی از نابرابریها هم مؤثر است (مسأله‌های بعدی را ببینید).

در مسألهٔ ۱۱ پایهٔ استقرا به‌جای $n = 1$، $n = 2$ است. دانش‌آموزان باید درک کنند که این مطلب در فرایند استقرا تأثیری ندارد.

در مسألهٔ ۱۵ استقرا روی هر یک از دو متغیر امکان‌پذیر است. آموزنده است که استقرا را درمورد هر یک از دو متغیر به‌کار ببرید و دو اثبات را با هم مقایسه کنید. فراموش نکنید که استقرا را از صفر شروع کنید!

مسأله‌های ۱۱ و ۱۲ به‌ترتیب حالتهای خاص مسأله‌های ۱۵ (به‌ازای $m = 2$) و ۱۴ (به‌ازای $a = b = 1$) هستند. به‌ازای مقدارهای مفروض دیگری از m، a و b می‌توان تعدادی تمرین مانند ۱۱ و ۱۲ به‌دست آورد. خوب است از دانش‌آموزان برجسته بخواهید که سعی کنند صورت مسألهٔ کلی‌ای را که این تمرینها حالتهای خاصش هستند پیدا کنند.

بیشتر اتحادهای مسأله‌های ۹ تا ۱۶ اثباتهای غیراستقرایی زیبایی دارند که چندان هم دشوار نیستند. مسألهٔ ۹ اثبات هندسی استادانه‌ای دارد (شکل ۷۰ را ببینید). اتحاد مسألهٔ ۱۱ را می‌توان از



شکل ۷۰

اتحادهای مسأله‌های ۹ و ۱۰ به‌دست آورد. می‌توان اتحاد مسألهٔ ۱۳ را با تقسیم $x^{n+1} - ۱$ بر $x - ۱$ و اتحاد مسألهٔ ۱۶ را با محاسبهٔ مستقیم ثابت کرد. برای اثبات اتحاد مسألهٔ ۱۲ کافی است توجه کنید که طرف چپش برابر است با

$$\left(۱ - \frac{۱}{۲}\right) + \left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳}\right) + \cdots + \left(\frac{۱}{n - ۱} - \frac{۱}{n}\right)$$

و این مجموع «در هم ادغام می‌شود».

این شگرد در مورد بعضی اتحادهای دیگر هم مؤثر است.

بررسی این اثباتهای متفاوت برای دانش‌آموزانی که قبلاً درس استقرای ریاضی را خوب یادگرفته‌اند بسیار سودمند است.

طبیعی است که مرحلهٔ بعدی مطالعه‌مان مسأله‌های بخش‌پذیری‌اند. فنون تشکیل دادن حکمها و گامهای استقرایی عین موارد مشابه در اتحادها هستند: معمولاً نمو عبارت موردنظر را پیدا و ثابت می‌کنیم که بر عددی مفروض بخش‌پذیر است. مسأله‌های ۱۷ تا ۱۹ راه‌حلهای سادهٔ دیگری هم دارند (با استفاده از حساب پیمانه‌ای). از مسألهٔ نسبتاً دشوار ۲۲ می‌توان تعدادی تمرین مانند تمرینهای ۱۸ و ۱۹ طرح کرد.

ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

مسألهٔ ۱۷. $n^۳ + (n + ۱)^۳ + (n + ۲)^۳$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۱۸. $۳^{۲n+۲} + ۸n - ۹$ بر ۱۶ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۱۹. $۴^n + ۱۵n - ۱$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۲۰. $۱۱^{n+۲} + ۱۲^{۲n+۱}$ بر ۱۳۳ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۲۱. $۲^{۳^n} + ۱$ بر $۳^{n+۱}$ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۲۲*. اگر عددهای $a+d$، $(b-1)c$ و $ab-a+c$ بر عدد طبیعی m بخش‌پذیر باشند، عدد ab^n+cn+d هم بر m بخش‌پذیر است.

گروه سه‌تایی مسأله‌های متعارفی راکه با روش استقرای ریاضی حل می‌شوند با مسأله‌هایی دربارهٔ نابرابریها کامل می‌کنیم. در اینجا اثبات گامهای استقرایی معمولاً متنوع‌ترند.

مسألهٔ ۲۳. ثابت کنید، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $n < 2^n$.

مسألهٔ ۲۴. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را پیدا کنید که

الف) $2^n > 2n+1$؛ ب) $2^n > n^2$

مسألهٔ ۲۵. ثابت کنید

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n} > \frac{13}{24}, \quad n=2,3,\ldots.$$

مسألهٔ ۲۶. ثابت کنید

$$2^n > 1+n\sqrt{2^{n-1}}, \quad n=2,3,\ldots.$$

مسألهٔ ۲۷. ثابت کنید که قدرمطلق مجموع چند عدد از مجموع قدرمطلقهای این عددها بزرگتر نیست.

مسألهٔ ۲۸. ثابت کنید

$$(1+x)^n > 1+nx$$

که در اینجا $x > -1$، $x \neq 0$ و $n=2,3,\ldots$.

مسألهٔ ۲۹. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$\frac{1\times 3\times 5\cdots(2n-1)}{2\times 4\times 6\cdots 2n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

راهنماییها. مسأله‌های ۲۳ و ۲۴: برای اثبات گام استقرایی می‌توانید ثابت کنید که به‌ازای هر n، نمو طرف چپ نابرابری از نمو طرف راست بزرگتر است.

مسألهٔ ۲۴ ب: برای اثبات گام استقرایی از مسألهٔ ۲۴ (الف) استفاده کنید.

مسألهٔ ۲۵: ثابت کنید طرف چپ نابرابری صعودی اکید است.

مسألهٔ ۲۷: روی تعداد جمعوندها از روش استقرا استفاده کنید.

مسأله‌های ۲۸ و ۲۹: راهنمایی مسألهٔ ۱۶ را ببینید.

۴. شکلهای دیگر روش استقرای ریاضی

تاکنون فقط به شکل اصلی روش استقرای ریاضی پرداخته‌ایم. همین‌که دانش‌آموزان این شکل از استقرا را خوب یاد گرفتند می‌توانیم به شکلهای پیچیده‌تر دیگر استقرا بپردازیم. بعضی از اینها را می‌توان نتیجه‌های شکل اصلی استقرا محسوب کرد، اما از دیدگاه روش شناختی طبیعی‌تر است که آنها را به‌طور جداگانه بررسی کنیم و در ضمن همیشه تصویر ذهنی «موج اثباتها» را به‌یاد داشته باشیم.

ابتدا به‌روش «استقرا از همهٔ nهایی که $k \leqslant n$ به‌حالتی که $n = k + ۱$» می‌پردازیم. گاهی این روش را «استقرای قوی» می‌نامند.

در روش معمولی استقرای ریاضی گام استقرایی نتیجه‌گیری حکم $P_{k+۱}$ از حکم قبلی، P_k، است. با وجود این، گاهی برای اثبات درستی $P_{k+۱}$ باید از بیش از یکی از (یا حتی همهٔ) حکمهای قبلی، یعنی $P_۱$ تا P_k، استفاده کنیم. تردیدی نیست که این عمل درست است، زیرا موج اثباتها به حکم P_k رسیده است و بنابراین همهٔ حکمهای زنجیره هم که پیش از P_k هستند قبلاً ثابت شده‌اند. به این ترتیب در اینجا صورت گام استقرایی از این قرار است:

(گام): به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k از درستی $P_۱$، $P_۲$، . . . و P_k درستی $P_{k+۱}$ نتیجه می‌شود.

* * *

به مثال زیر توجه کنید.

مسألهٔ ۳۰. ثابت کنید که هر عدد طبیعی را می‌توان به شکل مجموعی از چند توان متمایز ۲ نمایش داد.

راه‌حل. ابتدا پایهٔ استقرا را ثابت می‌کنیم. اگر عدد داده شده ۱ یا ۲ باشد آن وقت وجود نمایش خواسته شده روشن است.

اکنون عدد داده شده را با n نشان می‌دهیم و بزرگترین توانی از ۲ را پیدا می‌کنیم که از n بزرگتر نباشد. فرض کنید ۲^m توان موردنظر باشد؛ یعنی $۲^m \leqslant n < ۲^{m+۱}$. تفاضل $n - ۲^m$، که آن را با d نشان می‌دهیم، هم از n کوچکتر است و هم از ۲^m، زیرا $۲^m + ۲^m = ۲^{m+۱}$. بنابر فرض استقرا d را می‌توان به‌شکل مجموعی از چند توان متمایز ۲ نمایش داد و روشن است که ۲^m زیادی بزرگ است و در مجموع موردنظر نمی‌آید. به این ترتیب با افزودن ۲^m به این مجموع عبارت خواسته شده برای n را به‌دست می‌آوریم. در نتیجه استقرا کامل می‌شود.

مسألهٔ ۳۱. ثابت کنید که هر چندضلعی را (که لازم نیست محدب باشد) می‌توان با قطرهای جدا از هم (این قطرها فقط ممکن است در رأسهای چند ضلعی یکدیگر را قطع کنند) به چند مثلث تقسیم کرد.

راهنمایی: از استقرا روی تعداد ضلعها استفاده کنید. گام استقرایی بر اساس لمی است به این مضمون که هر چندضلعی (بجز مثلث) دست‌کم یک قطر دارد که کاملاً درون چندضلعی می‌افتد. چنین قطری

چند ضلعی موردنظر را به دو چندضلعی با تعداد ضلعهای کمتر تقسیم می‌کند.

* * *

شکل دیگری از روش استقرای ریاضی در مسألهٔ زیر نشان داده شده است.

مسألهٔ ۳۲. می‌دانیم که $x + \frac{1}{x}$ عددی صحیح است. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $x^n + \frac{1}{x^n}$ هم عددی صحیح است.

راه‌حل. می‌توان نوشت

$$\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}} + x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$$

و از این‌رو

$$x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}} = \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right)$$

بنابراین درمی‌یابیم که مجموع $(k+1)$ام در صورتی عددی صحیح است که دو مجموع قبلی‌اش عددهایی صحیح باشند. در نتیجه، روند استقرایی طبق معمول پیش می‌رود به‌شرطی که بررسی کنیم که دو مجموع نخست، $x + \frac{1}{x}$ و $x^2 + \frac{1}{x^2}$، عددهایی صحیح‌اند. این را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

توضیح. ویژگی این شکل از روش استقرای ریاضی این است که گام استقرایی براساس دو حکم قبلی است نه یک حکم. بنابراین پایهٔ استقرا در این حالت دو حکم نخست زنجیره است (طبیعی است که از کلمهٔ پایه در مورد آن بخش آغازین زنجیره استفاده کنیم که در آنها حکمها را باید مستقیماً بررسی کرد).

مسألهٔ ۳۳. دنبالهٔ عددهای a_1، a_2، ...، a_n، ... این‌طور تعریف شده است: $a_1 = 3$، $a_2 = 5$ و اگر $n > 2$، $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $a_n = 2^n + 1$.

راهنمایی: مسألهٔ کلی‌تر ۴۳ را ببینید.

یادداشت. در مسألهٔ ۳۳ و سه مسألهٔ بعدی هم با اثبات به‌روش استقرا سروکار داریم و هم با تعریف به‌روش استقرا: همهٔ جمله‌های دنباله‌های داده شده، بجز چند جملهٔ نخست آنها، به‌طور استقرایی با استفاده از جمله‌های قبلی تعریف می‌شوند. دنباله‌هایی را که این‌طور تعریف می‌شوند بازگشتی می‌نامند.

مسألهٔ ۳۴. دنبالهٔ (a_n) این‌طور تعریف شده است: $a_1 = 1$، $a_2 = 2$ و اگر $n > 2$، $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $a_{n+6} = a_n$.

مسألهٔ ۳۵. دنبالهٔ عددهای فیبوناتچی این‌طور تعریف می‌شود: $F_1 = F_2 = 1$ و اگر $n \geqslant 2$، $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. ثابت کنید که هر عدد طبیعی را می‌توان به‌شکل مجموع چند عدد فیبوناتچی متمایز نوشت.

مسألهٔ ۳۶*. ثابت کنید که nامین عدد فیبوناتچی وقتی و فقط وقتی بر ۳ بخش‌پذیر است که n بر ۴ بخش‌پذیر باشد.
راهنمایی: اثبات این حکم فقط با استفاده از استقرا آسان نیست. حکمی کلی‌تر را دربارهٔ تکرار باقی‌مانده‌های عددهای فیبوناتچی به‌پیمانهٔ ۳ (با دورهٔ تکرار ۸) ثابت کنید.

مسألهٔ ۳۷. بانکی موجودی نامحدودی از اسکناسهای ۳ و ۵ پزویی دارد. ثابت کنید که این بانک می‌تواند هر مبلغ بیش از ۷ پزو را پرداخت کند.
راهنمایی: استقرا روی مبلغی را که بانک باید پرداخت کند امتحان کنید. پایهٔ استقرا این سه تساوی‌اند: $۳ + ۵ = ۸$، $۳ + ۳ + ۳ = ۹$ و $۵ + ۵ = ۱۰$. گام استقرایی: اگر بانک بتواند k، $k + ۱$ و $k + ۲$ پزو را پرداخت کند، آن‌وقت می‌تواند $k + ۳$، $k + ۴$ و $k + ۵$ پزو را هم پرداخت کند. این استقرا با پایهٔ چند قسمتی را می‌توان با استفاده از طرحهای زیر به سه استقرای معمولی تقسیم کرد:

$$۸ \to ۱۱ \to ۱۴ \to \cdots, \quad ۹ \to ۱۲ \to ۱۵ \to \cdots, \quad ۱۰ \to ۱۳ \to ۱۶ \to \cdots$$

توجه کنید که انجام عملی مشابه در مورد مسأله‌های ۳۲ تا ۳۶ غیرممکن است.
در ضمن برای این مسأله راه‌حلی غیراستقرایی هم براساس رابطه‌های

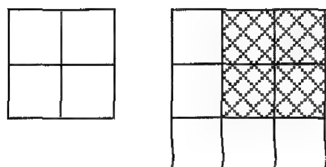
$$۳n + ۱ = ۵ + ۵ + ۳(n - ۳), \quad ۳n + ۲ = ۵ + ۳(n - ۱)$$

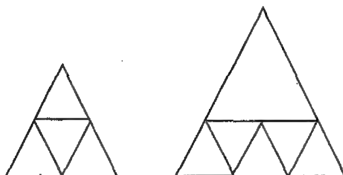
وجود دارد، اما از راه‌حل بالا آسانتر نیست.
سه مسألهٔ زیر بسیار شبیه مسألهٔ ۳۷اند.

مسألهٔ ۳۸. می‌توانیم هر تکه کاغذ را به ۴ یا ۶ تکهٔ کوچکتر تقسیم کنیم. ثابت کنید که با پیش گرفتن این قاعده می‌توانیم یک برگ کاغذ را به هر تعداد تکه کاغذ، بیش از ۸تا، تقسیم کنیم.

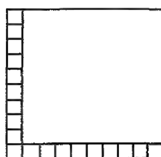
مسألهٔ ۳۹. اگر $n \geqslant ۶$، ثابت کنید که هر مربع را می‌توان به n مربع تقسیم کرد.

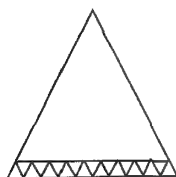
مسألهٔ ۴۰. اگر $n \geqslant ۶$، ثابت کنید که هر مثلث متساوی‌الاضلاع را می‌توان به n مثلث متساوی‌الاضلاع تقسیم کرد.
توضیحات. مسألهٔ ۳۸: اگر یک تکه کاغذ را به ۴ یا ۶ تکهٔ کوچکتر تقسیم کنیم، آن‌وقت تعداد تکه کاغذها به‌ترتیب ۳ یا ۵ تا زیاد می‌شود. اکنون از روش راه‌حل مسألهٔ ۳۷ استفاده می‌کنیم.
مسأله‌های ۳۹ و ۴۰: هر مربع (مثلث متساوی‌الاضلاع) را می‌توان مانند شکل ۷۱ به ۴ یا ۶ مربع (مثلث متساوی‌الاضلاع) تقسیم کرد. بنابراین مسألهٔ ۳۹ مانند مسألهٔ ۳۸ حل می‌شود. راه‌حلهای غیراستقرایی دیگری هم براساس امکان تقسیم کردن مربع (مثلث متساوی‌الاضلاع) به هر تعداد زوج (بیش از دوتا) مربع (یا مثلث متساوی‌الاضلاع) وجود دارد؛ شکل ۷۲ را ببینید.





شکل ۷۱





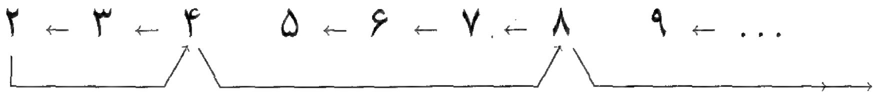
شکل ۷۲

شکلهای دیگر استقرا حتی از اینها هم جالبترند. مثالی از این دست روش «استقرای شاخه‌شاخه‌ای» است که با آن می‌توانیم نابرابری مهم میانگین حسابی-میانگین هندسی را ثابت کنیم.

مسألهٔ ۴۱*. اگر x_1، x_2، ...، x_n عددهای غیرمنفی دلخواهی باشند، ثابت کنید

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

طرح اثبات. پایهٔ استقرا: $n = 2$؛ بررسی درستی حکم در این حالت نسبتاً ساده است. بعد برای اثبات نابرابری در مورد همهٔ nهایی که توانی از ۲ هستند باید از گام استقرایی از $n = 2^k$ به 2^{k+1} استفاده کنید. آخر سر ثابت کنید که اگر نابرابری در مورد n عدد دلخواه درست باشد، آن‌وقت در مورد $n - 1$ عدد دلخواه هم درست است. موج اثباتها طبق طرح شکل ۷۳ گسترش می‌یابد.



شکل ۷۳

شکلهای دیگر استقرا از جملهٔ «استقرای پسرو» (روی عددهای صحیح منفی) و «استقرای دوگانه (یا ۲ بعدی)» (برای قضیه‌های شامل دو پارامتر طبیعی) در مسأله‌های ۴۳ و ۴۴ توضیح داده شده‌اند.

۵. مسأله‌های بدون توضیح

مسألهٔ ۴۲. دو عدد طبیعی نسبت به هم اول m و n و عدد ۰ داده شده‌اند. ماشین‌حسابی می‌تواند فقط یک عمل را انجام دهد: محاسبهٔ میانگین حسابی دو عدد طبیعی داده شده، آن هم به‌شرطی که یا هر دو زوج باشد یا هر دو فرد. ثابت کنید که با استفاده از این ماشین‌حساب می‌توانید همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا n را به‌دست آورید، به‌شرطی که فقط سه عدد اولیه یا نتیجه‌های محاسبه‌های قبلی را در آن وارد کنید.

مسألهٔ ۴۳. در مسألهٔ ۳۳، برای دنبالهٔ $a_۱$، $a_۲$، ... جمله‌های $a_۰$، $a_{-۱}$، $a_{-۲}$، ... را می‌توانیم طوری تعریف کنیم که رابطهٔ $a_{n+۱} = ۳a_n - ۲a_{n-۱}$ به‌ازای هر عدد صحیح مانند n (چه مثبت باشد چه منفی) برقرار باشد. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد صحیح مانند n، باز هم $a_n = ۲^n + ۱$.

مسألهٔ ۴۴. اگر m و n عددهایی طبیعی باشند، ثابت کنید $mn \geqslant ۲^{m+n-۲}$.

مسألهٔ ۴۵ *. چندتا مربع داده شده‌اند. ثابت کنید که می‌توان آنها را به‌تکه‌هایی برید و این تکه‌ها را طوری کنار هم چید که یک مربع بزرگ تشکیل شود.

مسألهٔ ۴۶ *. ثابت کنید که در میان هر $۲^{n+۱}$ عدد طبیعی، ۲^n عدد وجود دارند که مجموعشان بر ۲^n بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۴۷. n دایره صفحه را حداکثر به چند ناحیه تقسیم می‌کنند؟ در مورد n مثلث چه می‌توان گفت؟
توجه. این مسأله را با مسألهٔ ۶ مقایسه کنید. مثالهای تقسیمهای موردنظر را هم می‌توان به استقرا پیدا کرد.

مسألهٔ ۴۸. در صفحه‌ای چندتا دایره وجود دارد. در هر یک از آنها یک وتر رسم شده است. ثابت کنید که این «نقشه» را می‌توان با استفاده از سه‌رنگ طوری رنگ کرد که رنگهای هر دو ناحیهٔ مجاور مختلف باشند.

* * *

مسألهٔ ۴۹ *. به‌روش «برهان خلف» ثابت کنید که اصل استقرای ریاضی که در همان اوایل فصل حاضر بیان شد با «اصل خوشترتیبی» هم‌ارز است: هر مجموعهٔ ناتهی از عددهای طبیعی کوچکترین عضو دارد. سعی کنید که راه‌حل یکی از مسأله‌های قبلی (مثلاً، مسألهٔ ۴۶) را با استفاده از این اصل بنویسید و آن را با اثباتش از روش استقرا مقایسه کنید.

* * *

نتیجه‌گیری. روش استقرای ریاضی ایده‌ای بسیار مؤثر و سودمند است. کاربردهایش را هم در قسمتهای مختلف این کتاب خواهید یافت و هم در متون ریاضی دیگر. با وجود این، در مورد «اعتیاد» به آن به شما هشدار می‌دهیم. نباید این‌طور تصور کنید که هر سؤالی که در صورت یا اثباتش، یا در هر دو آنها، عبارتهایی از قبیل «و همین‌طور تا آخر» یا «به‌همین ترتیب» آمده است مسأله‌ای است که به‌روش استقرای ریاضی حل می‌شود. اثبات به‌روش استقرا در مورد بسیاری از مسأله‌های از این دست (چند تا از آنها را در فصلهای «گرافها ـ ۲» و «نابرابریها» خواهید دید) در مقایسه با دیگر اثباتهای شامل روشهایی ساده مانند محاسبهٔ مستقیم یا استدلال بازگشتی کمابیش تصنعی به‌نظر می‌رسد. هنگام آموزش ماهیت روش استقرای ریاضی استفاده از مثالهای غیرعادی از این‌دست به صلاح نیست، ولی بعد از اینکه دانش‌آموزان این روش را کاملاً خوب یاد گرفتند این‌گونه مثالها را می‌توان به راحتی مطرح کرد.

فصل ۱۰

بخش‌پذیری ـ ۲: همنهشتی و معادله‌های دیوفانتی

۱. همنهشتی

در فصل «بخش‌پذیری و باقی‌مانده‌ها» مفهوم باقی‌مانده را شرح دادیم. دیدیم که در حل بسیاری از مسأله‌های مربوط به بخش‌پذیری اکثراً به‌جای خود عددها باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر عددی ثابت را بررسی می‌کردیم.

بنابراین طبیعی است که تعریف کنیم: عددهای صحیح a و b را در صورتی به‌پیمانهٔ m همنهشت می‌نامند که باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر m برابر باشند. وقتی a و b به‌پیمانهٔ m همنهشت‌اند، می‌نویسند: $a \equiv b$ (به‌پیمانهٔ m).

مثلاً،

$$16 \equiv 9 \ (\text{به‌پیمانهٔ } 7), \quad 1 \equiv 3 \ (\text{به‌پیمانهٔ } 2), \quad 9 \equiv 29 \ (\text{به‌پیمانهٔ } 10)$$

$$2n + 1 \equiv 1 \ (\text{به‌پیمانهٔ } n), \quad 3 \equiv 0 \ (\text{به‌پیمانهٔ } 3)$$

توجه کنید که A وقتی و فقط وقتی بر m بخش‌پذیر است که $A \equiv 0$ (به‌پیمانهٔ m).

مسألهٔ ۱. ثابت کنید که وقتی و فقط وقتی $a \equiv b$ (به‌پیمانهٔ m) که $a - b$ بر m بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل. اگر $a \equiv b$ (به‌پیمانهٔ m)، آن‌وقت فرض کنید r باقی‌ماندهٔ مشترک تقسیم a و b بر m باشد. در این صورت

$$a = mk_1 + r, \qquad b = mk_2 + r$$

بنابراین $a-b=m(k_1-k_2)$ و در نتیجه $a-b$ بر m بخش‌پذیر است. برعکس، اگر $a-b$ بر m بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت a و b را بر m تقسیم می‌کنیم. فرض کنید مثلاً $a=mk_1+r_1$ و $b=mk_2+r_2$. در این صورت

$$a-b=m(k_1-k_2)+r_1-r_2$$

بنابر فرض، $a-b$ بر m بخش‌پذیر است. بنابراین r_1-r_2 بر m بخش‌پذیر است. چون $|r_1-r_2|<m$، پس $r_1=r_2$.

با استفاده از این مسأله می‌توانیم همنهشتی را جور دیگری تعریف کنیم: عددهای صحیح a و b در صورتی به‌پیمانهٔ m همنهشت‌اند که $a-b$ بر m بخش‌پذیر باشد.

از حالا به بعد همه‌جا از یکی از این دو تعریف استفاده می‌کنیم.

توصیه به معلمان. پیش از ارائهٔ تعریفهای همنهشتی مهم است بررسی کنید که آیا دانش‌آموزانتان به‌یاد دارند که چطور با باقی‌مانده‌ها کار کنند یا نه (مثلاً می‌توانید برایشان چند مسأله شبیه مسأله‌های بخش ۲ فصل «بخش‌پذیری و باقی‌مانده‌ها» مطرح کنید).

جالب است بدانید که با استفاده از تعریف همنهشتی می‌توانیم ویژگیهای اصلی باقی‌مانده‌ها را بسیار آسانتر ثابت کنیم.

مسألهٔ ۲. اگر $a\equiv b$ (به‌پیمانهٔ m) و $c\equiv d$ (به‌پیمانهٔ m)، ثابت کنید $a+c\equiv b+d$ (به‌پیمانهٔ m).

راه‌حل. چون $a-b$ و $c-d$ بر m بخش‌پذیرند و

$$(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$$

$(a+c)-(b+d)$ هم بر m بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۳. اگر $a\equiv b$ (به‌پیمانهٔ m) و $c\equiv d$ (به‌پیمانهٔ m)، ثابت کنید $a-c\equiv b-d$ (به‌پیمانهٔ m).

مسألهٔ ۴. اگر $a\equiv b$ (به‌پیمانهٔ m) و $c\equiv d$ (به‌پیمانهٔ m)، ثابت کنید $ac\equiv bd$ (به‌پیمانهٔ m).

راه‌حل. می‌توان نوشت

$$ac-bd=ac-bc+bc-bd=(a-b)c+b(c-d)$$

بنابراین $ac-bd$ هم بر m بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۵. اگر $a\equiv b$ (به‌پیمانهٔ m) و n عدد طبیعی دلخواهی باشد، ثابت کنید $a^n\equiv b^n$ (به‌پیمانهٔ m).

یادداشت. حکمها و اثباتهای ویژگیهای باقی‌مانده‌ها وقتی برحسب همنهشتیها نوشته می‌شوند جالبتر و ساده‌تر به‌نظر می‌آیند. مثلاً بدون استفاده از نمادگذاری جدید، حکم مسألهٔ ۲ را می‌توان این‌طور بیان کرد: مجموع دو عدد و مجموع باقی‌مانده‌هایشان به‌پیمانهٔ m، به‌پیمانهٔ m هم باقی‌مانده‌اند.

در مسأله‌های ۲ تا ۵ اساساً بیان شده است که همنهشتیها به‌پیمانهٔ عددی مفروض را می‌توان مانند تساویها، جمع، تفریق و ضرب کرد یا دوطرفشان را به توان رساند. بررسی مسألهٔ تقسیم همنهشتیها را به بخش ۴ موکول می‌کنیم.

پیش از ادامهٔ بحث نشان می‌دهیم که چطور می‌توان مسأله‌ها را به‌کمک همنهشتیها حل کرد.

مسألهٔ ۶. ثابت کنید به‌ازای هیچ عدد صحیحی مانند n، $n^۲ + ۱$ بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

راه‌حل. روشن است که هر عدد صحیح مانند n به‌پیمانهٔ ۳ با یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۲ همنهشت است.

اگر $n \equiv ۰$ (به‌پیمانهٔ ۳)، آن‌وقت $n^۲ \equiv ۰$ (به‌پیمانهٔ ۳) (بنابر ویژگی ضرب همنهشتیها) و درنتیجه $n^۲ + ۱ \equiv ۱$ (به‌پیمانهٔ ۳) (بنابر ویژگی جمع همنهشتیها).

اگر $n \equiv ۱$ (به‌پیمانهٔ ۳)، آن‌وقت $n^۲ + ۱ \equiv ۲$ (به‌پیمانهٔ ۳).

اگر $n \equiv ۲$ (به‌پیمانهٔ ۳)، آن‌وقت $n^۲ + ۱ \equiv ۲$ (به‌پیمانهٔ ۳).

به این ترتیب هیچ‌وقت همنهشتی $n^۲ + ۱ \equiv ۰$ (به‌پیمانهٔ ۳) به‌دست نمی‌آید.

اکنون به مسألهٔ دیگری می‌پردازیم که در راه‌حل آن نشان داده شده است که استفاده از عددهای صحیح منفی در همنهشتیها چقدر سودمند است. در حقیقت در حساب باقی‌مانده‌ها می‌توانیم عددهای صحیح منفی را هم درست مانند عددهای طبیعی به‌کار ببریم.

مسألهٔ ۷. $۶^{۱۰۰}$ به‌پیمانهٔ ۷ با کدام عدد همنهشت است؟

راه‌حل. چون $۷ = ۱ + ۶ = ۶ - (-۱)$، پس $۶ \equiv -۱$ (به‌پیمانهٔ ۷). دو طرف این همنهشتی را به توان ۱۰۰ می‌رسانیم؛ در نتیجه، $۶^{۱۰۰} \equiv (-۱)^{۱۰۰}$ (به‌پیمانهٔ ۷) یا $۶^{۱۰۰} \equiv ۱$ (به‌پیمانهٔ ۷).

در اینجا چند مسألهٔ دیگر را هم که با همین ایده حل می‌شوند می‌آوریم.

مسألهٔ ۸. ثابت کنید $۶۱^{۱۰۰} + ۳۰^{۹۹}$ بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۹. ثابت کنید

الف) $۲۳^{۱۰۱} + ۴۳^{۱۰۱}$ بر ۶۶ بخش‌پذیر است.

ب) اگر n عددی فرد باشد، $a^n + b^n$ بر $a + b$ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۱۰. ثابت کنید اگر n عددی فرد باشد، $۱^n + ۲^n + \cdots + (n - ۱)^n$ بر n بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۱۱. ثابت کنید تعدادی نامتناهی عدد طبیعی وجود دارند که نمی‌توان آنها را به شکل مجموع سه مربع کامل نوشت.

مسألهٔ ۱۲. ثابت کنید 10^{3n+1} را نمی‌توان به‌شکل مجموع مکعبهای دو عدد صحیح نوشت.

مسأله‌های ۱۱ و ۱۲ از مسأله‌های قبلی بسیار دشوارترند زیرا برای حل آنها باید بدانیم که آنها را بر کدام عدد مانند m تقسیم کنیم.

اکنون مسألهٔ ۱۲ را حل می‌کنیم. مکعب هر عدد طبیعی به‌پیمانهٔ ۷ همیشه با یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۱− همنهشت است (این را خودتان بررسی کنید!). بنابراین مجموع دو مکعب به‌پیمانهٔ ۷ همیشه با یکی از عددهای ۲−، ۱−، ۰، ۱ و ۲ همنهشت است. چون (به‌پیمانهٔ ۷)$10 \equiv 3$، پس (به‌پیمانهٔ ۷)$10^3 \equiv -1$ و در نتیجه 10^{3n+1} به‌پیمانهٔ ۷ با یکی از عددهای ۳ یا ۳− همنهشت است. بنابراین، این عدد را نمی‌توان به‌شکل مجموع مکعبهای دو عدد صحیح نوشت.

* * *

فرض کنید n عددی طبیعی باشد. در این صورت همهٔ عددهای صحیح مجموعهٔ نامتناهی $\mathbb{Z}$ خودبه‌خود در n دسته قرار می‌گیرند: دو عدد در صورتی در یک دسته‌اند که باقی‌مانده‌هایشان به‌پیمانهٔ n برابر باشند (یعنی این دو عدد به‌پیمانهٔ n همنهشت باشند). مثلاً، اگر $n = 2$، دو دسته به‌دست می‌آید: عددهای زوج و عددهای فرد. هنگام حل کردن مسأله‌های بخش‌پذیری در بیشتر موارد کافی است که درستی حکمها را به‌جای هر عدد صحیح فقط در مورد یک نمایندهٔ (دلخواه!) از هر دسته بررسی کنیم. به‌یاد بیاورید که در مسأله‌های بخش ۲ فصل «بخش‌پذیری و باقی‌مانده‌ها» معمولاً به‌عنوان نماینده همهٔ باقی‌مانده‌های مثبت به‌پیمانهٔ یک عدد را درنظر می‌گرفتیم و در مسأله‌های ۱۱ و ۱۲ این فصل، انتخاب نماینده‌های دیگر (برخی از عددهای انتخاب شده منفی بودند) مفیدتر واقع شد.

در دو مسألهٔ بعدی همین ایده توضیح داده شده است.

مسألهٔ ۱۳. ثابت کنید که در میان هر ۵۱ عدد صحیح، دو عدد وجود دارند که باقی‌مانده‌های مربعهایشان به‌پیمانهٔ ۱۰۰ با هم برابرند.

مسألهٔ ۱۴. عددی طبیعی مانند n را در صورتی «مناسب» می‌نامند که $n^2 + 1$ بر ۱۰۰۰۰۰۱ بخش‌پذیر باشد. ثابت کنید تعداد عددهای مناسب در میان عددهای ۱، ۲، ... و ۱۰۰۰۰۰۰ عددی زوج است.

مجموعهٔ مسأله‌های پایانی این بخش:

مسألهٔ ۱۵. الف) آیا ممکن است مربع عددی طبیعی به ۲ ختم شود (یعنی ممکن است رقم یکانش ۲ باشد)؟

ب) آیا می‌توان مربع عددی طبیعی را فقط با استفاده از رقمهای ۲، ۳، ۷ و ۸ نوشت (تکرار رقمها مجاز است)؟

مسألهٔ ۱۶. عددی پیدا کنید که وقتی با $(n^۲+۱)^{۱۰۰۱}(۱-n^۲)^{۱۰۰۰}$ جمع شود عدد حاصل بر n بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۱۷. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد

$$۱۰^{۱۰}+۱۰^{۱۰۰}+۱۰^{۱۰۰۰}+\cdots+۱۰^{۱۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰}$$

بر ۷ را پیدا کنید.

مسألهٔ ۱۸. چند عدد طبیعی مانند n وجود دارند که از ۱۰۰۰۰ بزرگتر نباشند و $۲^n-n^۲$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد؟

مسألهٔ ۱۹. حاصل‌ضرب چند عدد اول نخست (بیش از یک عدد اول) را با k نشان می‌دهیم. ثابت کنید عدد الف) $k-۱$؛ ب) $k+۱$، مربع کامل نیست.

مسألهٔ ۲۰. آیا عددی طبیعی مانند n وجود دارد که $n^۲+n+۱$ بر ۱۹۵۵ بخش‌پذیر باشد؟

مسألهٔ ۲۱. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، $۱۱^{n+۲}+۱۲^{۲n+۱}$ بر ۱۳۳ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
۱۱^{n+۲}+۱۲^{۲n+۱} &= ۱۲۱\times ۱۱^n+۱۲\times ۱۲^{۲n}\\
&= ۱۳۳\times ۱۱^n-۱۲\times ۱۱^n+۱۲\times ۱۲^{۲n}\\
&\equiv ۱۲(۱۲^{۲n}-۱۱^n)\\
&= ۱۲(۱۴۴^n-۱۱^n)\\
&\equiv ۰ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۳۳)
\end{aligned}$$

در این راه‌حل نشان داده‌ایم که اثباتهای استادانه فقط ماحصل ایده‌های زیبا نیستند، بلکه بعضی وقتها محاسبه‌های «دستیِ» ساده هم منجر به چنین اثباتهایی می‌شوند.

مسألهٔ ۲۲*. فرض کنید n عددی طبیعی و $n+۱$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد. ثابت کنید که مجموع همهٔ مقسوم‌علیه‌های n هم بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۲۳*. جمله‌های دنباله‌ای از عددهای طبیعی مانند $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، ...، به‌ازای هر n در شرط $a_{n+۲}=a_{n+۱}a_n+۱$ صدق می‌کنند.

الف) اگر $a_۱=a_۲=۱$، ثابت کنید که هیچ‌کدام از جمله‌های این دنباله بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

ب) ثابت کنید $a_۱$ و $a_۲$ هر چه باشند، به‌ازای همهٔ nهایی که $n>۱۰$، $a_n-۲۲$ عددی مرکب است.

مسألهٔ بالا فعلاً آخرین مسأله‌مان دربارهٔ همنهشتی است. در اینجا لازم است تأکید کنیم که تقریباً همهٔ مسأله‌های بعدی این فصل در حقیقت ادامهٔ همین مبحث‌اند.

۲. نمایش اعشاری و قاعده‌های بخش‌پذیری

بیشتر افراد با قاعده‌های بخش‌پذیری بر عددهای ۱۰، ۲، ۵ و ۴ آشنا هستند. هنگام مطالعهٔ همنهشتیها می‌توانیم حکمهایی به‌مراتب قویتر را بیان و ثابت کنیم.

مسألهٔ ۲۴. ثابت کنید هر عدد طبیعی با رقم یکانش به‌پیمانهٔ الف) ۱۰؛ ب) ۲؛ ج) ۵، همنهشت است.

راه‌حل. از عدد موردنظر رقم یکانش را کم می‌کنیم. در این صورت عددی به‌دست می‌آید که به صفر ختم می‌شود. این عدد بر ۱۰، و در نتیجه بر ۲ و ۵، بخش‌پذیر است.

توصیه به معلمان. پیش از آغاز مبحث قاعده‌های بخش‌پذیری لازم است که دانش‌آموزان اتحاد

$$\boxed{\overline{a_۱a_۲\ldots a_n} \equiv a_۱ ۱۰^{n-۱} + a_۲ ۱۰^{n-۲} + \cdots + a_{n-۱} ۱۰^{۱} + a_n}$$

را درک کنند، که در اینجا ردیفی از رقمها که «بالایش خط کشیده شده است» نشان‌دهندهٔ عددی طبیعی است که با این رقمها و به‌همین ترتیب نوشته می‌شود. مثلاً $\overline{ab} = ۱۰a + b$ که در آن a رقم دهگان و b رقم یکان عدد $\overline{ab}$ است.

مسألهٔ ۲۵. ثابت کنید

$$\overline{a_۱a_۲a_۳\ldots a_{n-۱}a_n} \equiv \overline{a_{n-۱}a_n} \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴)$$

مسألهٔ ۲۶. قاعده‌های بخش‌پذیری مشابهی را در مورد ۲^n و ۵^n بیان و ثابت کنید.

اکنون چند مسأله را مطرح می‌کنیم که در راه‌حلشان از قاعده‌های بخش‌پذیری بالا استفاده می‌شود.

مسألهٔ ۲۷. رقم آخر مربع عددی طبیعی ۶ است. ثابت کنید که رقم ماقبل آخرش عددی فرد است.

راه‌حل. چون رقم آخر این مربع ۶ است، عدد طبیعی موردنظر زوج است. مربع هر عدد زوج بر ۴ بخش‌پذیر است. بنابراین عدد حاصل از دو رقم آخر این مربع باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد. اکنون به آسانی می‌توان همهٔ عددهای دورقمی مضرب ۴ را که به ۶ ختم می‌شوند نوشت: ۱۶، ۳۶، ۵۶، ۷۶ و ۹۶. رقم دهگان همه‌شان عددی فرد است.

مسألهٔ ۲۸. رقم ما قبل آخر مربع عددی طبیعی عددی فرد است. ثابت کنید رقم آخرش ۶ است.

مسألهٔ ۲۹. ثابت کنید هیچ توانی از ۲ ممکن نیست که به چهار رقم برابر ختم شود.

مسألهٔ ۳۰. دست‌کم یک عدد ۱۰۰ رقمی پیدا کنید که هیچ‌یک از رقمهایش در نمایش اعشاری صفر نباشد و بر مجموع رقمهایش بخش‌پذیر باشد.

راه‌حل. با روش آزمون و خطا عددی پیدا می‌کنیم که مجموع رقمهایش برابر با ۱۲۵ شود. بخش‌پذیری هر عدد بر ۱۲۵ از سه رقم آخرش معلوم می‌شود. بنابراین عدد ۱۱۵۹۹۱۲۵ ۱۱۱۰۰۰ (در اول این عدد ۹۴ تا رقم ۱ آمده است) همان عددی است که می‌خواستیم.

اکنون قاعده‌های بخش‌پذیری بر عددهای ۳ و ۹ را بررسی می‌کنیم که آنها را هم می‌توان به‌شکلی کلیتر بیان کرد.

مسألهٔ ۳۱. ثابت کنید که هر عدد طبیعی با مجموع رقمهایش به‌پیمانهٔ الف) ۳؛ ب) ۹، همنهشت است.

راه‌حل. عدد

$$\overline{a_۱a_۲\dots a_n} = a_۱۱۰^{n-۱} + a_۲۱۰^{n-۲} + \dots + a_{n-۱}۱۰^۱ + a_n$$

را در نظر بگیرید. روشن است که (به‌پیمانهٔ ۹)۱ $\equiv$ ۱۰. بنابراین به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، (به‌پیمانهٔ ۹)۱ $\equiv$ ۱۰^k. در نتیجه

$$a_۱۱۰^{n-۱} + a_۲۱۰^{n-۲} + \dots + a_{n-۱}۱۰^۱ + a_n \equiv a_۱ + a_۲ + \dots + a_n (\text{به‌پیمانهٔ ۹})$$

راه‌حل مسأله در مورد بخش‌پذیری بر ۳ هم درست عین همین است.

مسأله‌های بعدی مربوط به این قاعده‌ها هستند.

مسألهٔ ۳۲. آیا می‌توان مربعی کامل را فقط با استفاده از، الف) رقمهای ۲، ۳، ۶؛ ب) رقمهای ۱، ۲ و ۳ که از هر یک از آنها دقیقاً ۱۰ بار استفاده شده است، نوشت؟

مسألهٔ ۳۳. مجموع رقمهای عدد $۲^{۱۰۰}$ را حساب می‌کنیم، بعد مجموع رقمهای عدد حاصل را حساب می‌کنیم و همین‌طور ادامه می‌دهیم تا اینکه فقط یک رقم بماند. این رقم چیست؟

مسألهٔ ۳۴. ثابت کنید که اگر در هر عدد طبیعی ترتیب رقمها را برعکس کنیم و عدد حاصل را از عدد اولیه کم کنیم، آن‌وقت این تفاضل بر ۹ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۳۵. یک رقم در طرف چپ و یک رقم در طرف راست عدد ۱۵ بنویسید، به‌طوری که عدد چهاررقمی حاصل بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۳۶. چند عدد چهاررقمی که دو رقم وسطی آنها ۹۷ است بر ۴۵ بخش‌پذیرند؟

مسألهٔ ۳۷. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که بر ۳۶ بخش‌پذیر باشد و در نمایش اعشاریش هر ۱۰ رقم بیایند.

مسألهٔ ۳۸. ثابت کنید حاصل‌ضرب آخرین رقم عدد 2^n و مجموع همهٔ رقمهایش بجز آخری، بر ۳ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۳۹. آیا ممکن است که مجموع رقمهای مربعی کامل برابر با ۱۹۷۰ شود؟

مسألهٔ ۴۰. از عددی سه‌رقمی مجموع رقمهایش را کم می‌کنیم. بعد همین عمل را در مورد عدد حاصل تکرار می‌کنیم و همین‌طور ادامه می‌دهیم تا اینکه این عمل در کل ۱۰۰ بار انجام شود. ثابت کنید که عدد آخری صفر است.

مسألهٔ ۴۱*. فرض کنید A مجموع رقمهای عدد 4444^{4444} و B مجموع رقمهای عدد A باشد. مجموع رقمهای عدد B را پیدا کنید.

با ایده‌هایی بسیار شبیه آنهایی که در اثبات قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۹ به‌کار رفتند می‌توانیم قاعدهٔ بخش‌پذیری مهم دیگری را ثابت کنیم.

مسألهٔ ۴۲. ثابت کنید

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n} \equiv a_n - a_{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}a_1 \ (\text{به‌پیمانهٔ } 11)$$

راهنمایی: می‌دانیم که $10 \equiv -1$ (به‌پیمانهٔ ۱۱)؛ بنابراین، به‌پیمانهٔ ۱۱ توانهای با نمای زوج ۱۰ همنهشت با ۱اند و توانهای با نمای فردش همنهشت با -1.

مجموعه مسأله‌های بعدی دربارهٔ این قاعده است.

مسألهٔ ۴۳. ثابت کنید عدد $11\cdots111$ ($2n$ رقم یک در این عدد آمده است) مرکب است.

مسألهٔ ۴۴. ثابت کنید عدد $\overline{a_1a_2\ldots a_na_n\ldots a_2a_1}$ مرکب است.

مسألهٔ ۴۵. فرض کنید a، b، c و d رقمهایی متمایز باشند. ثابت کنید عدد $\overline{cdcdcdcd}$ بر عدد $\overline{aabb}$ بخش‌پذیر نیست.

مسألهٔ ۴۶. A عددی شش‌رقمی با رقمهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ است. ثابت کنید A بر ۱۱ بخش‌پذیر نیست.

مسألهٔ ۴۷. ثابت کنید تفاضل عددی که تعداد رقمهایش فرد است و عددی که با همان رقمها منتها به ترتیب عکس نوشته شده است بر ۹۹ بخش‌پذیر است.

* * *

قاعده‌های بخش‌پذیری تنها راه ارتباط دادن ویژگیهای بخش‌پذیری عددها به نمایش اعشاریشان است. این ارتباط در مجموعه مسأله‌های زیر نشان داده شده است.

مسألهٔ ۴۸. آیا می‌توان فقط با استفاده از رقمهای ۲، ۳، ۴ و ۹ دو عدد نوشت که یکی از آنها ۱۹ برابر دیگری باشد؟

مسألهٔ ۴۹. مجموع دو رقم a و b بر ۷ بخش‌پذیر است. ثابت کنید عدد $\overline{aba}$ هم بر ۷ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۵۰. مجموع رقمهای عددی سه‌رقمی برابر با ۷ است. ثابت کنید این عدد وقتی و فقط وقتی بر ۷ بخش‌پذیر است که دو رقم آخرش برابر باشند.

مسألهٔ ۵۱. الف) عدد شش‌رقمی $\overline{abcdef}$ این ویژگی را دارد که $\overline{def} - \overline{abc}$ بر ۷ بخش‌پذیر است. ثابت کنید این عدد خودش هم بر ۷ بخش‌پذیر است.

ب) قاعده‌ای در مورد بخش‌پذیری بر ۷ بیان و آن را ثابت کنید.

ج) قاعده‌ای در مورد بخش‌پذیری بر ۱۳ بیان و آن را ثابت کنید.

مسألهٔ ۵۲. الف) عدد شش‌رقمی $\overline{abcdef}$ این ویژگی را دارد که $\overline{abc} + \overline{def}$ بر ۳۷ بخش‌پذیر است. ثابت کنید این عدد خودش هم بر ۳۷ بخش‌پذیر است.

ب) قاعده‌ای در مورد بخش‌پذیری بر ۳۷ بیان و آن‌را ثابت کنید.

مسألهٔ ۵۳. آیا عددی سه‌رقمی مانند $\overline{abc}$ (که در آن $a \neq c$) وجود دارد که عدد $\overline{abc} - \overline{cba}$ مربع کامل باشد؟

مسألهٔ ۵۴. کوچکترین عدد طبیعی را پیدا کنید که همهٔ رقمهایش یک باشند و بر ۳۳...۳۳۳ (صدتا رقم ۳ در این عدد آمده است) بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۵۵. آیا ممکن است مجموع نخستین چند عدد طبیعی به ۱۹۸۹ ختم شود؟

مسألهٔ ۵۶. همهٔ عددهایی طبیعی را پیدا کنید که وقتی یک صفر میان رقمهای یکان و دهگانشان بگذارید ۹ برابر شوند.

راه‌حل. عدد موردنظر را به‌شکل $10a + b$ می‌نویسیم که در آن b رقم یکان است و a عددی طبیعی. بعد از گذاشتن صفر، تساوی $100a + b = 9(10a + b)$ به‌دست می‌آید و از این تساوی هم نتیجه می‌شود $10a = 8b$ یا $5a = 4b$. بنابراین b باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد. با بررسی دو حالت $b = 0$ و $b = 5$ معلوم می‌شود که تنها پاسخ مسأله عدد ۴۵ است.

یادداشت. همان‌طور که الان دیدیم، گاهی نوشتن تساویی برحسب رقمهای عدد خواسته شده بسیار مفید است.

مسألهٔ ۵۷. میان رقمهای عددی دو رقمی که بر ۳ بخش‌پذیر است صفر می‌گذاریم و به عدد حاصل دو برابر رقم صدگانش را اضافه می‌کنیم. عددی که به‌دست می‌آید ۹ برابر عدد اولیه است. عدد اولیه را پیدا کنید.

مسألهٔ ۵۸. عددی چهاررقمی پیدا کنید که مربع کامل باشد و دو رقم اولش با هم برابر باشند و دو رقم آخرش هم، با هم.

مسألهٔ ۵۹. همهٔ عددهای سه‌رقمی را پیدا کنید که هر توانشان به خود عدد اصلی ختم شود.

مسألهٔ ۶۰. دو رقم ۴ و ۳ در طرف راست عددی طبیعی نوشته می‌شوند و بعد این عمل چند بار تکرار می‌شود (مثلاً از ۵۱ عدد ۵۱۴۳ به‌دست می‌آید، بعد عدد ۵۱۴۳۴۳ و همین‌طور تا آخر). ثابت کنید با این عمل دیر یا زود به اعدادی مرکب می‌رسیم.

مسألهٔ ۶۱*. ثابت کنید همهٔ عددهای

$$۱۰۰۰۱, ۱۰۰۰۱۰۰۰۱, ۱۰۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۱, \dots$$

مرکب‌اند.

۳. معادله‌هایی با جوابهای صحیح و مسأله‌های دیگر

در مسأله‌ای معروف ادعا شده است که اگر $N > ۷$، همیشه می‌توان مبلغ N پزو را با اسکناسهای ۳ و ۵ پزویی پرداخت کرد (مسألهٔ ۳۷ از فصل «استقرا» را ببینید). اگر این مسأله را با استفاده از معادله بیان کنیم معنایش این می‌شود که معادلهٔ

$$۳x + ۵y = N \qquad (*)$$

به‌ازای هر عدد طبیعی و بزرگتر از ۷ مانند N جوابی صحیح و غیرمنفی مانند x و y دارد. در این بخش جوابهای صحیح معادله‌های مشابه و دیگر معادله‌ها را پیدا می‌کنیم و معمولاً هنگام یافتن این جوابها بجز صحیح بودنشان هیچ محدودیت دیگری قائل نمی‌شویم.

* * *

مسألهٔ ۶۲. معادلهٔ $۳x + ۵y = ۷$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

در اینجا راه‌حل مسأله را کاملاً شرح می‌دهیم. با یادگیری روش حل این مسأله می‌توان مسأله‌های دیگر را هم از همین راه حل کرد.

ابتدا یک جواب خاص را پیدا می‌کنیم (این ایده در بیشتر موارد در حل مسأله‌های ریاضی مؤثر است). توجه کنید که $۱ = (۱-) \times ۵ + ۲ \times ۳$. دو طرف این برابری را در عدد ۷ ضرب می‌کنیم تا به‌دست آید $۷ = (۷-) \times ۵ + ۱۴ \times ۳$ و در نتیجه، $x_۰ = ۱۴$ و $y_۰ = -۷$ یک جواب (یکی از جوابهای بسیار) معادله است. بنابراین

$$۳x + ۵y = ۷; \qquad ۳x_۰ + ۵y_۰ = ۷$$

اگر از این معادله‌ها یکی را از دیگری کم کنیم و $x - x_۰$ و $y - y_۰$ را به‌ترتیب با a و b نشان دهیم به‌دست می‌آید

$$۳a + ۵b = ۰$$

بنابراین درمی‌یابیم که b باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد و a بر ۵. فرض کنید $a = ۵k$. در این صورت $b = -۳k$ که در اینجا k عددی صحیح و دلخواه است. پس این مجموعه جوابها به‌دست می‌آید:

$$x - x_۰ = ۵k$$

$$y - y_۰ = -۳k$$

یا

$$x = ۱۴ + ۵k$$

$$y = -۷ - ۳k$$

که در آنها k عددی صحیح و دلخواه است. به‌طور قطع این معادله جواب دیگری ندارد، زیرا تبدیلهایی که به‌کار بردیم همیشه منجر به معادله‌های هم‌ارز می‌شوند.

توصیه به معلمان. امیدواریم دانش‌آموزانتان هم این حقیقت را به‌همین روشنی درک کنند. بدون درک کامل این بخش از راه‌حل، یعنی اینکه به‌ازای $N = ۷$ این زوجهای (x, y) همهٔ جوابهای معادلهٔ (*)اند، ادامه دادن این مبحث تقریباً غیرممکن است.

مسألهٔ ۶۳. همهٔ ریشه‌های صحیح معادلهٔ $۳x - ۱۲y = ۷$ را پیدا کنید.

هنگام حل مسأله‌هایی از این دست با مشکلی جدی مواجه می‌شویم. برای اینکه با این مشکل آشنا شوید، مسألهٔ «بسیار دشوار» ۶۴ را به‌اختصار تحلیل می‌کنیم.

مسألهٔ ۶۴. معادلهٔ $۱۹۹۰x - ۱۷۳y = ۱۱$ را حل کنید.

بزرگی ضریبهای این معادله باعث می‌شود که یافتن جواب خاص برای آن دشوار شود. با وجود این، به‌راحتی می‌توان فهمید که عددهای ۱۹۹۰ و ۱۷۳ نسبت به هم اول‌اند و همین موضوع در حل مسأله مؤثر است.

لم. بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک (ب.م.م.) این عددها را می‌توان به‌ازای عددهایی صحیح مانند m و n به شکل $۱۹۹۰m - ۱۷۳n$ نوشت.

می‌توان این لم را با استفاده از اینکه همهٔ عددهایی را که هنگام محاسبهٔ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک از راه الگوریتم اقلیدسی (فصل «بخش‌پذیری و باقی‌مانده‌ها» را ببینید) به‌دست می‌آیند، به این شکل نوشت ثابت کرد. با وجود اینکه نوشتن این اثبات چندان هم آسان نیست. آن را به خواننده محول می‌کنیم.

به عبارت دقیقتر، از الگوریتم اقلیدسی به‌دست می‌آید $m = ۲$ و $n = ۲۳$. بنابراین $(۲, ۲۳)$ یک جواب خاص معادلهٔ $۱۹۹۰m - ۱۷۳n = ۱$ است. در نتیجه $(x_\circ, y_\circ)$ که در آن $x_\circ = ۲ \times ۱۱ = ۲۲$ و $y_\circ = ۲۳ \times ۱۱ = ۲۵۳$ هم یک جواب معادلهٔ

$$۱۹۹۰x - ۱۷۳y = ۱۱$$

است. عین مسألهٔ ۶۲ به‌دست می‌آوریم

$$x = x_\circ + ۱۷۳k = ۲۲ + ۱۷۳k,$$

$$y = y_\circ + ۱۹۹۰k = ۲۵۳ + ۱۹۹۰k$$

که در اینجا k عددی صحیح و دلخواه است.

مسألهٔ ۶۵. همهٔ ریشه‌های صحیح معادلهٔ $۲۱x + ۴۸y = ۶$ را پیدا کنید.

توجه. به‌طور کلی، اکنون می‌توانیم هر معادله به‌شکل $Ax + By = C$ (این معادله را معادلهٔ دیوفانتی خطی دو متغیرهٔ معمولی می‌نامند) را نسبت به مجهولهای صحیح x و y حل کنیم.

قضیه: اگر در معادلهٔ دیوفانتی خطی $Ax + By = C$ ضریبهای A و B نسبت به‌هم اول باشند، آن‌وقت عددهایی صحیح مانند $x_\circ$ و $y_\circ$ وجود دارند که $Ax_\circ + By_\circ = C$ و همهٔ ریشه‌های این معادله از این دستورها به‌دست می‌آیند:

$$x = x_\circ + Bk, \qquad y = y_\circ - Ak$$

تمرین. سعی کنید حکم کلی را که این قضیه حالت خاصی از آن است بیان و آن را با دقت ثابت کنید. (یادتان نرود حالتی را هم که A و B نسبت به هم اول نباشند و C بر (A, B) بخش‌پذیر نباشد بررسی کنید.)

مسألهٔ ۶۶. معادلهٔ $۲x + ۳y + ۵z = ۱۱$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید. (راستی، آیا این معادله در مجموعهٔ عددهای طبیعی جواب دارد؟)

مسألهٔ ۶۷*. یک مهرهٔ سرباز در یکی از خانه‌های باریکه‌ای از کاغذ شطرنجی به عرض واحد که از هر دو طرف نامتناهی است قرار دارد. این مهره را می‌توان m خانه به‌طرف راست یا n خانه به‌طرف چپ برد. کدام عددهای m و n این ویژگی را دارند که به‌ازای آنها این سرباز را می‌توان درست به‌خانهٔ سمت راستی خانهٔ شروع حرکتش (البته طی چند حرکت) برد؟ کمترین تعداد حرکتهای لازم برای انجام این کار چقدر است؟

* * *

معادله‌های با بیش از یک متغیر را که جوابهای صحیحشان خواسته می‌شود معادله‌های دیوفانتی می‌نامند؛ این نامگذاری برگرفته از نام دیوفانتوس اسکندرانی، ریاضیدان مشهور یونانی، است که این‌گونه معادله‌ها را در روزگاران قدیم مطالعه کرده است. اکنون چند معادلهٔ دیوفانتی دشوارتر را بررسی می‌کنیم.

مسألهٔ ۶۸. معادلهٔ $(۲x + y)(۵x + ۳y) = ۷$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

مسألهٔ ۶۹. معادلهٔ $xy = x + y + ۳$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

مسألهٔ ۷۰. معادلهٔ $x^۲ = ۱۴ + y^۲$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

مسألهٔ ۷۱. معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = x + y + ۲$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

راه‌حل همهٔ این مسأله‌ها ماحصل ایده‌ای بسیار معمولی، یعنی تحلیل حالت به حالت است. بی‌تردید نمی‌توان همهٔ زوجهای عددهای صحیح را نوشت و در مورد هر یک از آنها بررسی کرد که آیا در معادله صدق می‌کند یا نه. با وجود این، با انجام تبدیلهای ساده‌ای می‌توان این تحلیل را به بررسی فقط چند حالت خلاصه کرد.

اکنون مسألهٔ ۶۹ را حل می‌کنیم. چون $xy - x - y = ۳$، پس $(x - ۱)(y - ۱) = ۴$. با این حساب فقط کافی است همهٔ نمایشهای عدد ۴ به شکل حاصل‌ضربی از دو عامل را بررسی کنیم.

پاسخ: $(x, y) = (۵, ۲), (۲, ۵), (۰, -۳), (-۳, ۰), (۳, ۳), (-۱, -۱)$.

در مسأله‌های ۷۰ و ۷۱ هم می‌توانیم معادلهٔ داده شده را تبدیل کنیم. بنابراین نخستین ایدهٔ مؤثر در حل معادله‌های دیوفانتی از این قرار است:

ایدهٔ یک: تبدیل مناسب معادلهٔ موردنظر و بعد استفاده از تحلیل حالت به حالت.

با وجود این، حتی در همین مسألهٔ بعدی هم این ایده به‌کار نمی‌آید.

مسألهٔ ۷۲. معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = ۴z - ۱$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

روشن است که این معادله را نمی‌توان به معادله‌ای قابل حل‌تر تبدیل کرد؛ بررسی همهٔ سه‌تاییهای

مناسب از عددهای صحیح هم غیرممکن است. این نمونهٔ جدید از «باغ وحش دیوفانتی»مان از این نظر قابل‌توجه است که هیچ جواب صحیحی ندارد.

ابتدا ببینید که باقی‌مانده‌های تقسیم مربعهای کامل بر ۴ کدام عددها هستند. (اینکه برای حل این مسأله باید باقی‌مانده‌های عددها به‌پیمانهٔ ۴ را در نظر گرفت از شکل معادلهٔ موردنظر معلوم شده است.) تنها باقی‌مانده‌های ممکن ۰ و ۱ اند. چون از مجموع هیچ دو تایی از این باقی‌مانده‌ها باقی‌ماندهٔ ۱− به‌دست نمی‌آید، پس این معادله جواب صحیح ندارد.

بنابراین به دومین ایدهٔ مؤثر در حل معادله‌های دیوفانتی می‌رسیم:

ایدهٔ دو: باقی‌مانده‌های عددها به‌پیمانهٔ عددی طبیعی را درنظر بگیرید.

مسألهٔ ۷۳. معادلهٔ $x^۲ - ۷y = ۱۰$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

مسألهٔ ۷۴. معادلهٔ $x^۳ + ۲۱y^۲ + ۵ = ۰$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

مسألهٔ ۷۵. معادلهٔ $۱۵x^۲ - ۷y^۲ = ۹$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

مسألهٔ ۷۶. معادلهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = ۸t - ۱$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

مسألهٔ ۷۷. معادلهٔ $۳^m + ۷ = ۲^n$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

راه‌حل مسألهٔ ۷۴. چون $x^۳$ به‌پیمانهٔ ۷ فقط با یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۱− همنهشت است، $x^۳ + ۲۱y^۲ + ۵$ به‌پیمانهٔ ۷ باید با یکی از عددهای ۵، ۶ یا ۴ همنهشت باشد و بنابراین ممکن نیست صفر باشد.

یادداشت. احتمالاً تاکنون متوجه شده‌اید که با «ایدهٔ دو» فقط می‌توانیم عدم وجود ریشه را ثابت کنیم. در حقیقت، اگر معادله‌ای به‌پیمانهٔ ۷ یا به‌پیمانهٔ ۳ جواب داشته باشد، نتیجه نمی‌شود که معادلهٔ موردنظر دست‌کم یک جواب صحیح دارد. مثلاً معادلهٔ $۲x^۲ - y^۳ = ۶$ به‌پیمانهٔ ۷ ریشه دارد ($x \equiv ۰$ و $y \equiv ۱$) و همین‌طور به‌پیمانهٔ ۳ ($x \equiv ۰$ و $y \equiv ۰$)، اما این معادله جواب صحیح ندارد (به‌راحتی می‌توانید این حکم را با در نظر گرفتن باقی‌مانده‌های تقسیم عددها بر ۸ ثابت کنید).

اکنون با مسألهٔ ۷۷ دست و پنجه نرم می‌کنیم. بی‌درنگ می‌توان فهمید که این معادله دست‌کم یک جواب دارد: $m = ۲$ و $n = ۴$. آیا در اینجا بررسی باقی‌مانده‌ها منطقی به‌نظر می‌رسد؟ با عجله نتیجه‌گیری نکنید! سمت چپ معادلهٔ به‌پیمانهٔ ۳ همنهشت با ۱ است. چون (به‌پیمانهٔ ۳)$۲ \equiv -۱$، پس n عددی زوج است، یعنی $n = ۲k$. بنابراین $۳^m + ۷ = ۴^k$. اکنون مانده‌ها به‌پیمانهٔ ۴ ممکن است به‌کارمان بیایند. در اینجا، (به‌پیمانهٔ ۴)$۴^k - ۷ \equiv ۱$. از این رو (به‌پیمانهٔ ۴)$۳^m \equiv ۱$ و در نتیجه m هم عددی زوج است، یعنی $m = ۲p$. بنابراین معادلهٔ موردنظر به‌شکل $۳^{۲p} + ۷ = ۲^{۲k}$ درمی‌آید.

اما حالا چی؟ از «ایدهٔ یک» استفاده می‌کنیم:

$$۷ = ۲^{۲k} - ۳^{۲p} = (۲^k - ۳^p)(۲^k + ۳^p)$$

بنابراین، $۷ = ۲^k + ۳^p$ و $۱ = ۲^k - ۳^p$ و جواب یکتای $k = ۲$ و $p = ۱$ را به‌دست می‌آوریم؛ در نتیجه، $m = ۲$ و $n = ۴$.

در اینجا از هر دو ایده یا روشی که پیشتر بررسی شدند استفاده کردیم. این‌جور تلفیق ایده‌ها در ریاضیات بسیار متداول است.

اکنون به معادلهٔ دیوفانتی دیگری می‌پردازیم که در راه‌حل آن هم تلفیق ایده‌ها عین مسألهٔ قبلی مؤثر است:

مسألهٔ ۷۸. معادلهٔ $۳ \times ۲^m + ۱ = n^۲$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

راه‌حل. چون $n^۲ \equiv ۱$ (به‌پیمانهٔ ۳)، روشن است که n بر ۳ بخش‌پذیر نیست. بنابراین یا $n = ۳k + ۱$ یا $n = ۳k + ۲$. هر حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم.

الف) اگر $n = ۳k + ۲$، آن‌وقت $۳ \times ۲^m + ۱ = ۹k^۲ + ۱۲k + ۴$. بعد از ساده‌کردن به‌دست می‌آوریم

$$۲^m = ۳k^۲ + ۴k + ۱ = (۳k + ۱)(k + ۱)$$

تنها عاملهای توانی از ۲، توانهای دیگر ۲ هستند. بنابراین $k + ۱$ و $۳k + ۱$ توانهایی از ۲اند. مقدارهای $k = ۰$ و $k = ۱$ در اینجا جور درمی‌آیند و به‌ترتیب جوابهای $n = ۲$، $m = ۱$ و $n = ۵$، $m = ۳$ را به‌دست می‌آوریم. با وجود این، اگر $k \geqslant ۲$، آن‌وقت $۴(k + ۱) > ۳k + ۱ > ۲(k + ۱)$. از این نابرابری معلوم می‌شود که ممکن نیست دو عدد $k + ۱$ و $۳k + ۱$ همزمان توانهایی از ۲ باشند.

ب) فرض کنید $n = ۳k + ۱$. اگر عین حالت قبلی عمل کنیم یک جواب دیگر را پیدا می‌کنیم: $n = ۷$ و $m = ۴$.

علاوه بر ایده‌های تحلیل حالت به حالت و تجزیه، ایدهٔ تخمین زدن هم بعضی وقتها به‌کار می‌آید.

ایدهٔ سه: هنگام حل معادله‌های دیوفانتی ممکن است استفاده از نابرابریها و یا تخمین زدن مؤثر باشد.

مسألهٔ ۷۹. معادلهٔ $۱ = \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c}$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

مسألهٔ ۸۰. معادلهٔ $x^۲ - y^۲ = ۱۹۸۸$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

مسألهٔ ۸۱. ثابت کنید معادلهٔ $\frac{۱}{n} = \frac{۱}{y} - \frac{۱}{x}$ وقتی و فقط وقتی در مجموعهٔ عددهای طبیعی دقیقاً یک جواب دارد که n عددی اول باشد.

مسألهٔ ۸۲. معادلهٔ $x^۳ + ۳ = ۴y(y + ۱)$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

در این بخش کوتاه مجال آن نیست که دیگر روشهای جالب و پیچیدهٔ حل معادله‌های دیوفانتی را شرح دهیم.

در اینجا دو مسألهٔ دیگر را که از مسأله‌های بالا بسیار دشوارترند می‌آوریم. ممکن است بخواهید پیش از اینکه خودتان حلشان کنید راهنماییهای آنها را ببینید.

مسألهٔ ۸۳*. معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = z^۲$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

مسألهٔ ۸۴*. معادلهٔ $x^۲ - ۲y^۲ = ۱$ را در مجموعهٔ عددهای صحیح حل کنید.

۴. قضیهٔ «کوچک» فرما

این بخش به قضیه‌ای نابدیهی و فوق‌العاده در نظریهٔ اعداد اختصاص دارد که آن را پیر دو فرما، ریاضیدان برجستهٔ فرانسوی قرن هفدهم، بیان و ثابت کرده است. اما پیش از بیان این قضیه، (همان‌طور که در بخش ۱ قول دادیم) مسألهٔ تقسیم در همنهشتیها را بررسی می‌کنیم.

مسألهٔ ۸۵. فرض کنید (به‌پیمانهٔ $ka \equiv kb(m$ ، که در اینجا k و m نسبت به هم اول‌اند. ثابت کنید (به‌پیمانهٔ $a \equiv b(m$.

راه‌حل. چون (به‌پیمانهٔ $ka \equiv kb(m$ و $ka - kb = k(a-b)$، پس $k(a-b)$ بر m بخش‌پذیر است. اما چون k و m نسبت به هم اول‌اند، پس $a - b$ بر m بخش‌پذیر است؛ بنابراین، (به‌پیمانهٔ $a \equiv b(m$.

به راحتی می‌توان برای اثبات اینکه در این مسأله k و m باید نسبت به هم اول باشند مثالهایی پیدا کرد. در حقیقت (به‌پیمانهٔ ۱۰)$۷ \times ۵ \equiv ۳ \times ۵$، اما عددهای ۳ و ۷ به‌پیمانهٔ ۱۰ همنهشت نیستند.

در هر صورت حکم مسألهٔ زیر همواره درست است:

مسألهٔ ۸۶. اگر (به‌پیمانهٔ $ka \equiv kb(kn$، آن وقت (به‌پیمانهٔ $a \equiv b(n$.

اکنون آماده‌ایم که قضیهٔ «کوچک» فرما را بیان و ثابت کنیم.

قضیه: فرض کنید p عددی اول باشد و عدد A بر p بخش‌پذیر نباشد. در این صورت (به‌پیمانهٔ $A^{p-۱} \equiv ۱(p$.

اثبات. $p - ۱$ عدد: A، $۲A$، $۳A$، ... ، $(p-۱)A$ را در نظر بگیرید. می‌توانیم ثابت کنیم که باقی‌مانده‌های تقسیم هیچ دو تایی از این عددها بر p یکی نیست. در حقیقت، اگر (به‌پیمانهٔ $kA \equiv nA(p$ ، آن‌وقت (به‌پیمانهٔ $k = n(p$ (مسألهٔ ۸۵ را ببینید). اما اگر k و n برابر نباشند و هر دو از p کوچکتر باشند، چنین چیزی ممکن نیست. بنابراین در میان باقی‌مانده‌های تقسیم این $p - ۱$ عدد بر p هر کدام از عددهای

۱ تا $p-۱$ دقیقاً یک بار می‌آید. اگر این عددها را در هم ضرب کنیم به‌دست می‌آید

$$A \times ۲A \times ۳A \cdots (p-۱)A \equiv ۱ \times ۲ \times ۳ \cdots (p-۱) (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

یا

$$(p-۱)! \times A^{p-۱} \equiv (p-۱)! (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

اکنون توجه کنید که p عددی اول است و در نتیجه عددهای $(p-۱)!$ و p نسبت به‌هم اول‌اند. با استفاده از حکم مسألهٔ ۸۵ به‌دست می‌آوریم $A^{p-۱} \equiv ۱ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$.

نتیجه. فرض کنید p عددی اول باشد. در این صورت به‌ازای هر عدد صحیح مانند A، $A^p \equiv A (\text{به‌پیمانهٔ } p)$.

قضیهٔ «کوچک» فرما صرفاً حقیقتی دور از انتظار و «قشنگ» نیست. این قضیه روشی بسیار مؤثر برای حل تعداد زیادی از مسأله‌های حساب هم هست. چند مسأله از این دست را در زیر آورده‌ایم.

مسألهٔ ۸۷. باقی‌ماندهٔ تقسیم $۲^{۱۰۰}$ بر ۱۰۱ را پیدا کنید.

مسألهٔ ۸۸. باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳^{۱۰۲}$ بر ۱۰۱ را پیدا کنید.

راه‌حل. چون ۱۰۱ عددی اول است، پس $۳^{۱۰۰} \equiv ۱ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۰۱)$. بنابراین

$$۳^{۱۰۲} = ۹ \times ۳^{۱۰۰} \equiv ۹ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۰۱)$$

توصیه به معلمان. ممکن است تمرینهای محاسباتی از این دست که با استفاده از قضیهٔ فرما حل می‌شوند برای دانش‌آموزان تا حدودی پیش پا افتاده باشند.

مسألهٔ ۸۹. ثابت کنید که $۳۰۰^{۳۰۰۰} - ۱$ بر ۱۰۰۱ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۹۰. باقی‌ماندهٔ تقسیم $۸^{۹۰۰}$ بر ۲۹ را پیدا کنید.

مسألهٔ ۹۱. ثابت کنید که $۷^{۱۲۰} - ۱$ بر ۱۴۳ بخش‌پذیر است.

راه‌حل. ثابت می‌کنیم که $۷^{۱۲۰} - ۱$ بر ۱۱ و ۱۳ بخش‌پذیر است. در حقیقت

$$(۷^{۱۲})^{۱۰} \equiv ۱ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۱) \quad \text{و} \quad (۷^{۱۰})^{۱۲} \equiv ۱ (\text{به‌پیمانهٔ } ۱۳)$$

مسألهٔ ۹۲. ثابت کنید عدد $۳۰^{۲۳۹} + ۲۳۹^{۳۰}$ اول نیست.

مسألهٔ ۹۳. فرض کنید p عددی اول باشد و a و b عددهایی صحیح و دلخواه باشند. ثابت کنید

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

سعی کنید برای این مسأله دو اثبات پیدا کنید: یکی با استفاده از قضیهٔ «کوچک» فرما و دیگری با استفاده از قضیهٔ دوجمله‌ای (فصل «ترکیبیات-۲» را ببینید).

مسألهٔ ۹۴. مجموع عددهای a، b و c بر ۳۰ بخش‌پذیر است. ثابت کنید که $a^5 + b^5 + c^5$ هم بر ۳۰ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۹۵. فرض کنید p و q عددهای اول متمایزی باشند. ثابت کنید

الف) $p^q + q^p \equiv p + q$ (به‌پیمانهٔ pq).

ب) اگر $p, q \neq 2$، $\left[\frac{p^q + q^p}{pq}\right]$ عددی زوج است که در اینجا $[x]$ تابع جزء صحیح عدد x است.

مسألهٔ ۹۶. فرض کنید p عددی اول باشد و p عدد a را نشمارد. ثابت کنید که عددی طبیعی مانند b وجود دارد که $ab \equiv 1$ (به‌پیمانهٔ p).

مسألهٔ ۹۷. (قضیهٔ ویلسون). فرض کنید p عددی اول باشد. ثابت کنید که $(p-1)! \equiv -1$ (به‌پیمانهٔ p).

مسألهٔ ۹۸. فرض کنید عدد طبیعی n بر ۱۷ بخش‌پذیر نباشد. ثابت کنید که یا $n^8 + 1$ بر ۱۷ بخش‌پذیر است یا $n^8 - 1$.

مسألهٔ ۹۹. الف) فرض کنید p عددی اول باشد و $p \neq 3$. ثابت کنید که عدد ۱۱...۱۱۱ (p رقم یک در این عدد آمده است) بر p بخش‌پذیر نیست.

ب) فرض کنید p عددی اول باشد و $p > 5$. ثابت کنید که عدد ۱۱...۱۱۱ ($p-1$ رقم یک در این عدد آمده است) بر p بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۱۰۰. ثابت کنید که به‌ازای هر عدد اول مانند p تفاضل

$$111\ldots11222\ldots22333\ldots33\ldots888\ldots88999\ldots99 - 123456789$$

(در نخستین عدد هر رقم غیر صفر دقیقاً p بار نوشته شده است) بر p بخش‌پذیر است.

فصل ۱۱

ترکیبیات ـ ۲

این فصل دنبالهٔ بلافصل فصل «ترکیبیات ـ ۱» است. مطالبی که در اینجا می‌آیند با استفاده از مطالبی که در فصل ۲ توضیح داده شدند به‌دست می‌آیند.

* * *

توصیه به معلمان. دانش‌آموزان باز هم باید تعدادی مسأله حل کنند که در آنها ایده‌هایی از ترکیبیات که قبلاً مطرح شده‌اند آمده است و فقط وقتی از این مسأله‌ها رد شوند که هیچ مشکلی برای آنها پیش نیاورند. اگر این مسأله‌ها مشکلی پیش آورند، توصیه می‌کنیم که به فصل «ترکیبیات ـ ۱» مراجعه کنند.

مطالب این فصل مربوط به یکی از مهمترین عناصر ترکیبیات می‌شوند که همین الان آن را یاد می‌گیریم.

۱. ترکیبها

ابتدا به این مسألهٔ ساده توجه کنید.

مسألهٔ ۱. دو دانش‌آموز باید از میان گروهی سی‌نفره برای مسابقه‌ای ریاضی انتخاب شوند. به چند طریق می‌توان این کار را کرد؟

راه‌حل. می‌توانید اولین شرکت‌کننده در مسابقه را به ۳۰ طریق انتخاب کنید. بدون درنظرگرفتن اینکه نفر اول کیست، می‌توان نفر دوم را به ۲۹ طریق انتخاب کرد. اما به این ترتیب هر زوج را دو بار شمرده‌ایم. بنابراین جواب برابر است با $\frac{۳۰ \times ۲۹}{۲}$ یا ۴۳۵ طریق. توجه کنید که صرفاً از روش راه‌حل مسألهٔ ۲۲ فصل «ترکیبیات ـ ۱» استفاده کرده‌ایم.

اکنون فرض کنید که باید تیمی k نفره از میان گروهی n نفره از دانش‌آموزان انتخاب کنیم. تعداد راههایی را که می‌توان این کار را کرد تعداد ترکیبهای k عضو از میان n عضو می‌نامند و با $\binom{n}{k}$ (بخوانید «انتخاب k از n») نشان می‌دهند.

مثلاً $\binom{۲}{۱} = ۲$، $\binom{۳}{۲} = ۳$، $\binom{n}{۱} = n$ و $\binom{n}{n} = ۱$. توجه کنید که $\binom{n}{۰}$ را هم می‌توان به‌طور طبیعی تعبیر کرد: برای اینکه کسی را از میان n نفر انتخاب نکنیم فقط یک راه وجود دارد. یعنی، به‌ازای هر n، $\binom{n}{۰} = ۱$.

جالب است که می‌توان برخی ویژگیهای این عددها را با استدلالهای ساده ترکیبیاتی، بدون استفاده از دستوری برای محاسبهٔ $\binom{n}{k}$، ثابت کرد.

ویژگی ۱. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

اثبات. توجه کنید که انتخاب k تا شرکت‌کننده در مسابقه معادل انتخاب $n - k$ دانش‌آموز است که در مسابقه شرکت نکنند. بنابراین، تعداد راههای انتخاب k نفر از n نفر برابر است با تعداد راههای انتخاب $n - k$ نفر از n نفر؛ یعنی، $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

ویژگی ۲. $\binom{n}{k-۱} + \binom{n}{k} = \binom{n+۱}{k}$.

اثبات. فرض کنید $n + ۱$ دانش‌آموز داریم. یکی از آنها را در نظر بگیرید و نامش را A بگذارید. همهٔ تیمهایی را که می‌توان تشکیل داد به دو دسته تقسیم می‌کنیم: تیمهایی که شامل Aاند و تیمهایی که شامل A نیستند. تعداد تیمهای دستهٔ اول $\binom{n}{k-۱}$تاست ـ زیرا باید تیم را با $k - ۱$ دانش‌آموز دیگر از n دانش‌آموز باقی‌مانده تکمیل کنیم. تعداد تیمهای دستهٔ دوم $\binom{n}{k}$تاست ـ باید کل تیم را از n دانش‌آموز باقی‌مانده انتخاب کنیم. بنابراین

$$\binom{n+۱}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-۱}$$

یادداشت. با استفاده از این نحوهٔ استدلال می‌توانیم حکمهای نسبتاً مهمی را بی‌آنکه محاسبه‌ای انجام دهیم ثابت کنیم. این وضعیت کاملاً مختص ترکیبیات است. معمولاً پس از چند دقیقه تفکر و دریافت خصلت ترکیبیاتی سؤال می‌توان از انجام محاسبات خسته‌کننده اجتناب کرد. برای همین است که لازم دانستیم اثباتهایی این‌چنینی را به تفصیل توضیح دهیم.

اکنون دستوری برای محاسبهٔ $\binom{n}{k}$ پیدا می‌کنیم.

مسألهٔ ۲. به چند طریق می‌توان تیمی سه‌نفره را از میان ۳۰ نفر دانش‌آموز انتخاب کرد؟

راه‌حل. دانش‌آموز اول را می‌توان به ۳۰ طریق انتخاب کرد، دانش‌آموز دوم را می‌توان به ۲۹ طریق انتخاب کرد و دانش‌آموز سوم را می‌توان به ۲۸ طریق انتخاب کرد. بنابراین $۳۰ \times ۲۹ \times ۲۸$ راه برای انتخاب داریم. البته، هر تیم را چند بار شمرده‌ایم: هر تیم سه‌نفره را می‌توان از راههای مختلف انتخاب کرد. مثلاً، اینکه اول دانش‌آموز A را انتخاب کنیم، بعد دانش‌آموز B را انتخاب کنیم و آخر سر دانش‌آموز C را انتخاب کنیم، مثل این است که ابتدا دانش‌آموز C را انتخاب کنیم، بعد دانش‌آموز A را انتخاب

کنیم و بعد دانش‌آموز B را انتخاب کنیم. چون تعداد جایگشتهای ۳ شیء !۳ است، هر تیم را دقیقاً !۳ یا ۶ بار شمرده‌ایم. بنابراین $\binom{۳۰}{۳}$ برابر است با $\frac{۳۰ \times ۲۹ \times ۲۸}{۳!}$.

دقیقاً به همین روش می‌توانیم دستوری برای محاسبهٔ $\binom{n}{k}$ پیدا کنیم:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-k+۱)}{k!}$$

توصیه به معلمان. عدد $\binom{n}{k}$ موضوع اصلی این فصل است. بنابراین، مهم است که مطمئن شوید همهٔ دانش‌آموزان بفهمند که در این فصل چه چیزی را می‌شماریم و تعداد ترکیبها را چگونه حساب می‌کنیم. باید پیش از نشان دادن دستور کلی، دربارهٔ راه‌حل مسأله‌هایی شبیه مسألهٔ ۲ بحث کرد.

چند مسألهٔ دیگر را بررسی می‌کنیم.

مسألهٔ ۳. به چند طریق می‌توان ۴ رنگ را از میان ۷ رنگ مفروض انتخاب کرد؟

پاسخ: $\binom{۴}{۷}$ یا ۳۵ طریق.

مسألهٔ ۴. دانش‌آموزی ۶ کتاب ریاضی دارد و دانش‌آموز دیگری ۸ کتاب. به چند طریق می‌توان ۳ تا از کتابهای دانش‌آموز اول را با ۳ تا از کتابهای دانش‌آموز دوم معاوضه کرد؟

راه‌حل. دانش‌آموز اول می‌تواند ۳ کتابش را به $\binom{۶}{۳}$ طریق انتخاب کند و دانش‌آموز دوم می‌تواند این کار را به $\binom{۸}{۳}$ طریق بکند. بنابراین تعداد راههای معاوضهٔ کتابها برابر است با

$$\binom{۶}{۳}\binom{۸}{۳} = ۱۱۲۰$$

مسألهٔ ۵. ۲ معلم و ۷ دانش‌آموز در باشگاه شطرنجی عضوند. تیمی چهار نفره باید برای شرکت در مسابقه‌ای انتخاب شود، و باید دست‌کم یک معلم عضو این تیم باشد. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

راه‌حل. در تیم موردنظر یا ۱ معلم باید باشد یا ۲ معلم. در حالت دوم، ۲ دانش‌آموز را می‌توان به $\binom{۷}{۲}$ طریق به تیم موردنظر اضافه کرد. اگر فقط یک معلم در تیم باشد (به دو طریق می‌توان این معلم را انتخاب کرد)، می‌توان تیم را با اضافه کردن ۳ دانش‌آموز به $\binom{۷}{۳}$ طریق کامل کرد. بنابراین تعداد تیمهایی که می‌توان تشکیل داد برابر است با

$$\binom{۷}{۲} + ۲\binom{۷}{۳} = ۹۱$$

مسألهٔ ۶. به چند طریق می‌توان ۱۰ پسر را به دو تیم بسکتبال ۵ نفره تقسیم کرد؟

راه‌حل. تیم اول را می‌توان به $\binom{۱۰}{۵}$ طریق انتخاب کرد. با این انتخاب، ترکیب تیم دوم کاملاً مشخص می‌شود. البته، در این نحوهٔ شمارش هر جفت تیم مکمل ـ مثلاً تیم A و B ـ را دو بار شمرده‌ایم: بار اول وقتی که تیم A را به‌عنوان تیم اول انتخاب کرده‌ایم و بار دوم وقتی که تیم B را به‌عنوان تیم دوم انتخاب کرده‌ایم. بنابراین جواب $\frac{\binom{۱۰}{۵}}{۲}$ است.

یادداشت. وقتی‌که با این دستورها آشنا شدیم لزومی ندارد که جوابها را به شکل عددهای اعشاری بنویسیم. اگر عبارت $\binom{n}{k}$ در جواب وجود داشته باشد، اصلاً بد نیست.

توجه کنید که اینکه از دستور محاسبهٔ $\binom{n}{k}$ ویژگی ۱ دربارهٔ متقارن بودن یعنی $\binom{n}{k} = \binom{k}{n-k}$ به‌دست بیاید تقریباً نامعلوم است. با وجود این، می‌توانیم با ضرب کردن صورت و مخرج این دستور در $(n-k)!$ کاری کنیم که متقارنتر به‌نظر آید:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n(n-۱)\cdots(n-k+۱)(n-k)!}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n(n-۱)\cdots(n-k+۱)(n-k)\cdots ۳\times ۲\times ۱}{k!(n-k)!}\\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

اکنون ویژگی ۱ با استفاده از این دستور به سادگی به‌دست می‌آید.

تمرین. ویژگی دوم $\binom{n}{k}$ را با استفاده از دستور بالا ثابت کنید.

توصیه به معلمان. توصیه می‌کنیم که دست‌کم یک جلسه از محفل ریاضی‌تان را صرف تعریف، بیان ویژگیها و دستور محاسبهٔ عدد $\binom{n}{k}$ کنید. همچنین بهتر است که در این جلسه تعدادی مسألهٔ ساده حل کنید و در جلسه‌های بعدی مسأله‌هایی مرتبط با این موضوع را مطرح کنید.

مسألهٔ ۷. ده نقطه روی صفحه طوری انتخاب شده‌اند که هیچ سه تایی از آنها روی یک خط راست قرار ندارند. چند مثلث وجود دارند که رأسهایشان از این نقطه‌ها هستند؟

مسألهٔ ۸. جوخه‌ای از ۳ افسر، ۶ استوار و ۶۰ سرباز تشکیل شده است. به چند طریق می‌توان دسته‌ای شامل یک افسر، ۲ استوار و ۲۰ سرباز برای مأموریت انتخاب کرد؟

مسألهٔ ۹. ده نقطه روی خطی راست و یازده نقطه روی خط راست دیگری، موازی خط اول، انتخاب شده‌اند. چند

الف) مثلث

ب) چهارضلعی

وجود دارد که رأسهایشان از این نقطه‌ها هستند؟

مسألۀ ۱۰. مجموعه‌ای از ۱۵ کلمۀ مختلف مفروض است. به چند طریق می‌توان زیرمجموعه‌ای انتخاب کرد که بیش از ۵ کلمه نداشته باشد؟

مسألۀ ۱۱. ۴ جفت زن و شوهر در باشگاهی عضوند. به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۳ نفره انتخاب کرد که هیچ زن و شوهری عضو این کمیته نباشند؟

مسألۀ ۱۲. کلاسی ۳۱ دانش‌آموز دارد که پت و جان هم عضو آن‌اند. به چند طریق می‌توان تیم فوتبالی (۱۱ نفره) تشکیل داد که پت و جان با هم در این تیم نباشند؟

مسألۀ ۱۳. به چند طریق می‌توان حروف کلمۀ «ASUNDER» را طوری از نو مرتب کرد که حروف صدادار به ترتیب الفبایی باشند، همین‌طور حروف بی‌صدا؟ مثال: DANERUS (A-E-U, D-N-R-S).

مسألۀ ۱۴. باید از میان ۱۲ دانش‌آموز و ۱۰ معلم تیمی ۵ نفره انتخاب کنیم. به چند طریق می‌توان این تیم را انتخاب کرد که حداکثر ۳ معلم در آن باشند؟

مسألۀ ۱۵. به چند طریق می‌توان ۱۲ سرباز سفید و ۱۲ سرباز سیاه را روی خانه‌های سیاه صفحه‌ای شطرنجی قرار داد؟

مسألۀ ۱۶. الف) به چند طریق می‌توان ۱۵ نفر را به سه تیم ۵ نفره تقسیم کرد؟
ب) به چند طریق می‌توان دو تیم ۵ نفره از میان ۱۵ نفر انتخاب کرد؟

مسألۀ ۱۷. عددهای ۱ تا ۱۳ را روی سیزده کارت قرمز نوشته‌ایم، همین‌طور در مورد سیزده کارت آبی، سیزده کارت زرد و سیزده کارت سبز. به چند طریق می‌توانیم ۱۰ کارت از این ۲۵ کارت انتخاب کنیم که
الف) دقیقاً روی یکی از آنها عدد ۱ نوشته شده باشد؟
ب) دست‌کم روی یکی از آنها عدد ۱ نوشته شده باشد؟

مسألۀ ۱۸. چند عدد شش‌رقمی ۳ رقم زوج دارند و ۳ رقم فرد؟

مسألۀ ۱۹. چند عدد ده‌رقمی وجود دارد که مجموع رقمهای هر کدامشان
الف) برابر با ۲ است؟
ب) برابر با ۳ است؟
ج) برابر با ۴ است؟

مسألۀ ۲۰. شخصی ۶ دوست دارد. او می‌خواهد عصر ۵ روز متوالی ۳ نفر از دوستانش را به خانه‌اش دعوت کند، به‌طوری که هیچ گروه سه‌نفره‌ای دو بار دعوت نشده باشند. به چند طریق می‌تواند این کار را بکند؟

مسألهٔ ۲۱. برای شرکت در لاتاری ورزشی در روسیه باید ۶ عدد از ۴۵ عددی را که روی کارتهای لاتاری چاپ شده‌اند انتخاب کنید (قطع همهٔ کارتهای چاپ شده یکسان است).

الف) به چند طریق می‌توان کارت لاتاری را تکمیل کرد؟

ب) در پایان لاتاری، برگزارکنندگان تصمیم می‌گیرند که تعداد راههای تکمیل کارت لاتاری را طوری حساب کنند که دقیقاً ۳ عدد از ۶ عدد انتخاب شده در میان ۶ عدد برنده باشند. به آنها کمک کنید جواب را پیدا کنند.

۲. مثلث پاسکال

این بخش به‌دلیل ترکیب کردن تقریباً تمامی ایده‌هایی که پیش از این در این فصل توضیح داده شده‌اند قابل‌توجه است. در این بخش به حکمهای ترکیبیاتی فوق‌العاده زیبایی می‌رسیم.

در آغاز، فرض کنید که به‌ازای عددی ثابت مانند n، مقدار همهٔ عددهایی مانند $\binom{n}{k}$ را می‌دانیم. در این صورت، با استفاده از ویژگی دوم، یعنی

$$\binom{n+۱}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-۱}$$

به‌سادگی می‌توانیم به‌ازای همهٔ kها $\binom{n+۱}{k}$ را حساب کنیم.

چون $۱ = \binom{۰}{۰}$، ۱ را در وسط خط اول صفحهٔ کاغذ می‌نویسیم. در خط بعدی عددهای $\binom{۱}{۰}$ و $\binom{۱}{۱}$ را، که هر دو برابر با ۱ اند، طوری می‌نویسیم که $\binom{۰}{۰}$ بالای فاصلهٔ میان این عددها قرار داشته باشد (شکل ۷۴ را ببینید).



شکل ۷۴

عددهای $\binom{۲}{۰}$ و $\binom{۲}{۲}$ هم برابر با ۱ اند. این عددها را در خط بعدی می‌نویسیم (شکل ۷۵ را ببینید) و $\binom{۲}{۱}$ را هم که بنابر ویژگی دوم برابر است با $\binom{۱}{۰} + \binom{۱}{۱}$ میان آنها می‌نویسیم (شکل ۷۶ را ببینید).

بنابراین، عدد $\binom{۲}{۱}$ برابر است با مجموع دو عددی که در سطر قبلی در سمت چپ و سمت راست آن قرار دارند.

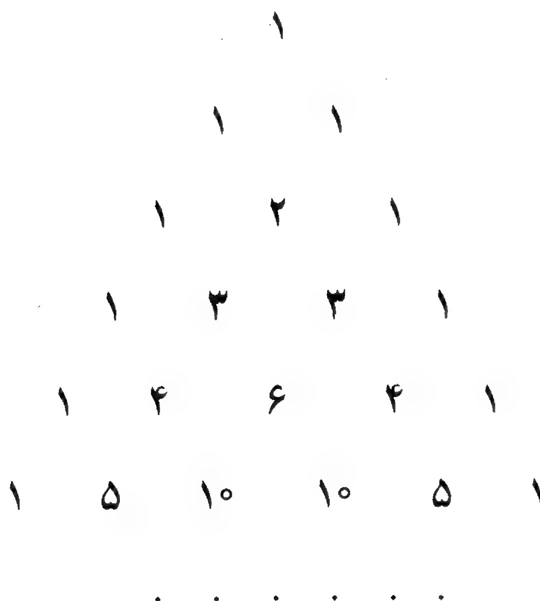
به‌همین قاعده می‌توانیم همهٔ سطرهای بعدی را پر کنیم: ابتدا عددهای $\binom{n}{۰}$ و $\binom{n}{n}$ را در دو طرف



شکل ۷۶ شکل ۷۵

می‌نویسیم (این عددها همواره ۱اند) و سپس مجموع هر دو عدد مجاور در سطر قبل را در فاصلهٔ بین آنها در سطر بعد می‌نویسیم.

به این ترتیب، مثلث عددیی که در شکل ۷۷ نشان داده‌ایم به‌دست می‌آید. این مثلث را مثلث پاسکال می‌نامند.



شکل ۷۷

نحوهٔ تشکیل مثلث پاسکال به‌گونه‌ای است که عدد $\binom{n}{k}$ در مکان $(k+۱)$ام سطر $(n+۱)$ام این مثلث جای گرفته است. بنابراین، بهتر است که شمارهٔ سطرها و شمارهٔ جای عددها در سطرها را از صفر شروع کنیم. در این صورت عدد $\binom{n}{k}$، kامین عدد در سطر nام است.

توصیه به معلمان. پیش از اینکه بحث را ادامه دهید، دانش‌آموزان باید ارتباط عددهایی مانند $\binom{n}{k}$ و مثلث پاسکال را بیاموزند. بهترین تمرین برای رسیدن به این هدف، محاسبهٔ ترکیبها با استفاده از فرایند مثلثی‌ای است که در بالا توصیف کردیم.

اکنون ویژگیهای مثلث پاسکال را بررسی می‌کنیم. مجموع عددهای چند سطر اول را حساب کنید:

$$۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, \ldots$$

خیلی طبیعی است که حدس بزنیم مجموع عددهای سطر nام برابر با ۲^n است. این حکم را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم (فصل «استقرا» را ببینید). پایهٔ استقرا را قبلاً ثابت کرده‌ایم. برای اثبات گام استقرایی، توجه کنید که هر عدد در هر سطر در مجموعی برای تشکیل دو عدد مجاور در سطر بعدی به‌کار رفته است. بنابراین مجموع عددهای سطر بعدی دقیقاً دو برابر مجموع سطری است که مجموع آن را می‌دانیم. اثبات گام استقرایی کامل شده است.

همچنین، می‌توانیم ثابت کنیم که در هر سطر مثلث پاسکال (بجز صفر صفرم) مجموع عددهایی که شمارهٔ جایشان زوج است با مجموع عددهایی که شمارهٔ جایشان فرد است برابر است.

می‌توانیم حکمی را که دربارهٔ مجموع عددهای سطرهای مثلث پاسکال ثابت کردیم به‌شکل اتحاد ترکیبیاتی مهم

$$\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \cdots + \binom{n}{n-۱} + \binom{n}{n} = ۲^n$$

بنویسیم.

برای این اتحاد اثباتی ترکیبیاتی می‌آوریم. تعبیر ترکیبیاتی این اتحاد این است که تعداد تیمهایی که می‌توان از n دانش‌آموز تشکیل داد، به‌شرطی که تعداد عضوهای تیم دلخواه باشد، برابر است با ۲^n (یا به زبان نظریهٔ مجموعه‌ها: تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای nعضوی برابر است با ۲^n).

دانش‌آموزان را به دلخواه از ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم. سپس برای هر تیمی که می‌توان تشکیل داد دنباله‌ای از ۰ و ۱ها به‌طریق زیر تشکیل می‌دهیم: اگر دانش‌آموز اول عضو تیم باشد، عضو اول دنباله ۱ است و در غیر این صورت ۰ است. به همین ترتیب عضو دوم، عضو سوم، ... را تعریف می‌کنیم. واضح است که تیمهای مختلف نظیر دنباله‌های مختلف‌اند و برعکس. بنابراین تعداد همهٔ تیمهایی که می‌توان تشکیل داد برابر است با تعداد همهٔ دنباله‌های nعضوی از ۰ و ۱. هر عضو چنین دنباله‌هایی یا ۰ است یا ۱، یعنی می‌توان آن را به دو طریق انتخاب کرد. بنابراین تعداد همهٔ چنین دنباله‌هایی برابر است با

$$۲ \times ۲ \times \cdots \times ۲ = ۲^n$$

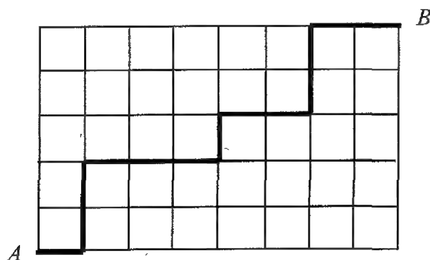
یادداشت. مهمترین قسمت این اثبات برقراری ارتباط میان تیمها و دنباله‌هایی از ۰ و ۱ است. این تعبیر معمولاً در حل مسأله‌های ترکیبیاتی دیگر هم خیلی مفید است. در اینجا دو نمونهٔ دیگر از این دست آورده‌ایم.

مسألهٔ ۲۲. شخصی ۱۰ دوست دارد. او می‌خواهد طی چند روز تعدادی از دوستانش را به صرف ناهار دعوت کند، به‌طوری که ترکیب مدعوین هیچ‌گاه تکراری نباشد (مثلاً، می‌تواند هیچ‌کسی را در یک روز دعوت نکند). چند روز پشت سر هم می‌تواند این کار را تکرار کند؟

مسألهٔ ۲۳. پلکانی ۷ پله دارد (پای پلکان و بالای آن را نشمرده‌ایم). هنگام پایین آمدن می‌توانیم چند پله‌یکی کنیم، حتی ۷ پله را. به چند طریق می‌توان از این پلکان پایین آمد؟

پیش از اینکه ویژگی بعدی مثلث پاسکال را بگوییم مسأله‌ای را بررسی می‌کنیم که در راه‌حل آن عددهایی مانند $\binom{n}{k}$ به‌طور غیرمنتظره ظاهر می‌شوند.

مسألهٔ ۲۴. نقشهٔ شهری در شکل ۷۸ نشان داده شده است. همهٔ خیابانها یک‌طرفه‌اند، در نتیجه فقط می‌توانیم به سمت «شرق» یا «شمال» رانندگی کنیم. به چند طریق می‌توان از نقطهٔ A به نقطهٔ B رفت؟



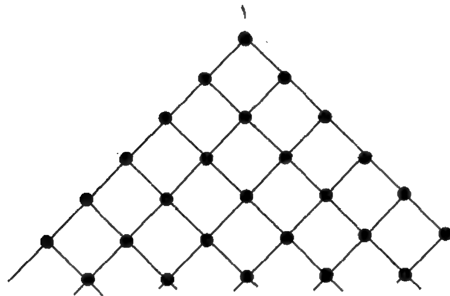
شکل ۷۸

راه‌حل. هر پاره‌خطی که دو نقطهٔ مجاور روی نقشه را به هم وصل می‌کند «خیابان» می‌نامیم. معلوم است که هر راهی از A به B دقیقاً ۱۳ خیابان دارد، که ۸تای آنها افقی‌اند و ۵تای آنها عمودی. هر راهی را که درنظر بگیریم، می‌توانیم دنباله‌ای از حرفهای N و E به‌شکل زیر تشکیل دهیم: وقتی که به سمت «شمال» رانندگی می‌کنیم یک حرف N و وقتی که به سمت «شرق» حرکت می‌کنیم یک حرف E به دنباله اضافه می‌کنیم. مثلاً راهی که در شکل ۷۸ نشان داده شده نظیر دنبالهٔ ENNEEENEENNEE است. هر دنباله که به این طریق ساخته می‌شود ۱۳ حرف دارد ـ ۸ حرف E و ۵ حرف N. کافی است که تعداد چنین دنباله‌هایی را حساب کنیم. هر دنباله‌ای با دانستن ۵ جایی که حرفهای N قرارگرفته‌اند (یا، معادل آن، ۸ جایی که حرفهای E قرارگرفته‌اند) به‌طور یکتا

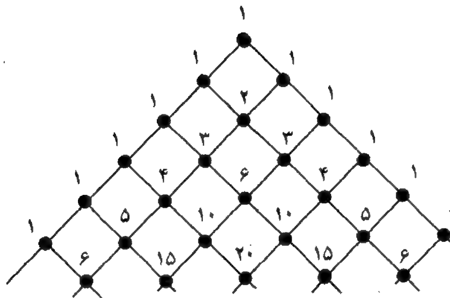
مشخص می‌شود. پنج جا از ۱۳ جا را می‌توان به $\binom{13}{5}$ طریق انتخاب کرد. بنابراین تعداد دنباله‌های موردنظر، و در نتیجه تعداد راههای موردنظر، برابر است با $\binom{13}{5}$.

از همین روش استدلال معلوم می‌شود که در مستطیل $m \times n$، جواب برابر است با $\binom{m+n}{m}$ یا، معادل آن، $\binom{m+n}{n}$.

مثلث پاسکال را در نظر بگیرید و به‌جای عددهای آن نقطه بگذارید (شکل ۷۹ را ببینید). کنار نقطهٔ S، بالاترین نقطه، عدد ۱ را بنویسید و بعد کنار هر نقطهٔ دیگر تعداد راههایی را که می‌توان از نقطهٔ S به این نقطه رسید، به‌شرطی که فقط رو به پایین حرکت کنیم، بنویسید. معلوم می‌شود که دوباره به مثلث پاسکال می‌رسیم (شکل ۸۰ را ببینید).

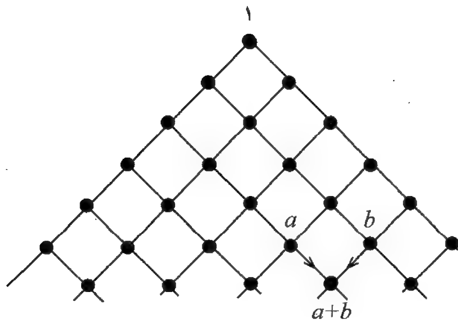


شکل ۷۹



شکل ۸۰

یکی از روشهای اثبات این حکم شبیه روش راه‌حل مسألهٔ قبل است. البته، در اینجا، مانند اثبات این حکم که مجموع عددهای هر سطر توانی از دو است، از استقرا استفاده می‌کنیم. در حقیقت، برای رسیدن به kامین نقطه در سطر nام فقط می‌توان یا از $(k-1)$امین نقطهٔ سطر $(n-1)$ام رفت یا از kامین نقطهٔ سطر $(n-1)$ام (شکل ۸۱ را ببینید). بنابراین برای پیدا کردن تعداد راههای موردنظر فقط کافی است تعداد راههای رفتن به این دو نقطه را در سطر قبل با هم جمع کنیم. در نتیجه، با



شکل ۸۱

استفاده از فرض، تعداد راههایی که می‌توان از نقطهٔ S به kامین نقطه در سطر nام رفت برابر است با

$$\binom{n-۱}{k-۱}+\binom{n-۱}{k}=\binom{n}{k}$$

یادداشت. هر دو ویژگی مثلث پاسکال را که در بالا آوردیم به دو طریق ثابت کردیم ـ با استفاده از ایده‌های «هندسی» و از طریق استدلال ترکیبیاتی. هنگام حل کردن مسأله‌های مختلف، به‌ویژه اتحادهای ترکیبیاتی، استفاده از هر دو این روشها مفید است.

برخی دیگر از ویژگیهای مثلث پاسکال را در زیر به‌عنوان مسأله آورده‌ایم که باید آنها را حل کنید. می‌توان این مسأله‌ها را به زبان مثلث پاسکال یا اتحادهای ترکیبیاتی بیان کرد.

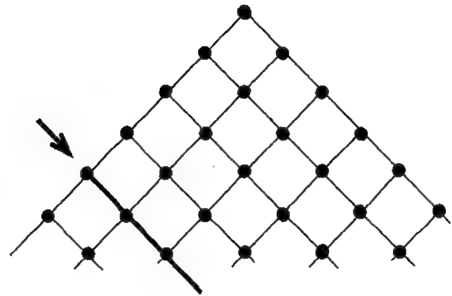
مسألهٔ ۲۵. ثابت کنید می‌توان از میان n شیء به $۲^{n-۱}$ طریق تعدادی زوج شیء انتخاب کرد.

مسألهٔ ۲۶. ثابت کنید

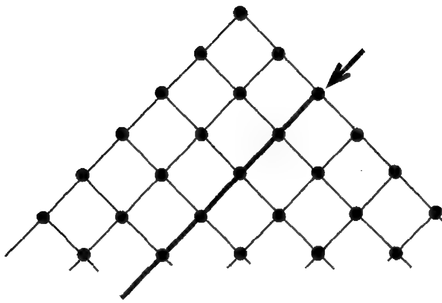
$$\binom{n}{۰}-\binom{n}{۱}+\cdots+(-۱)^n\binom{n}{n}=۰$$

برای راحتی کار، از تعریفهای زیر استفاده می‌کنیم. نیمخطهای موازی ضلعهای مثلث پاسکال را قطرهای آن می‌نامیم. به‌طور دقیقتر، نیمخطهای موازی ضلع سمت راست مثلث را قطرهای راست می‌نامیم (یکی از آنها را در شکل ۸۲ مشخص کرده‌ایم) و نیمخطهای موازی ضلع سمت چپ مثلث را قطرهای چپ می‌نامیم (شکل ۸۳ را ببینید).

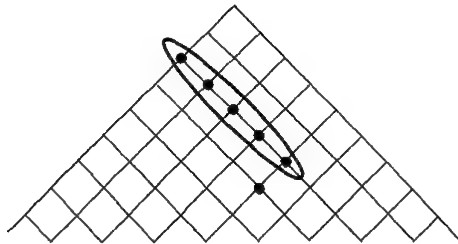
مسألهٔ ۲۷. ثابت کنید هر عدد در مثلث پاسکال مانند a برابر است با مجموع عددهایی در قطر راست قبل از آن، که از عددی که در منتهاالیه سمت چپ این قطر قرارگرفته شروع می‌شوند و به عددی که روی همان قطر چپی که a قرار دارد ختم می‌شوند (شکل ۸۴ را ببینید).



شکل ۸۲

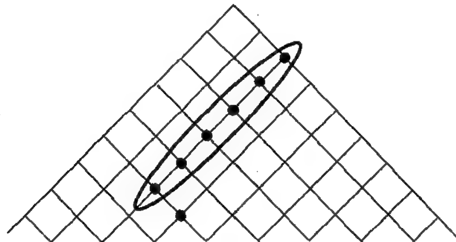


شکل ۸۳



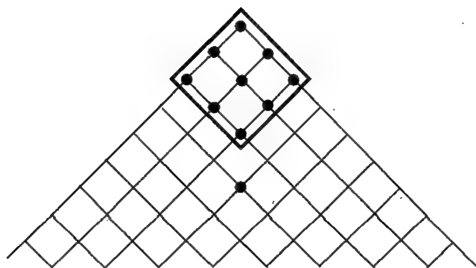
شکل ۸۴

مسألهٔ ۲۸. ثابت کنید هر عدد در مثلث پاسکال مانند a برابر است با مجموع عددهایی در قطر چپ قبل از آن، که از عددی که در منتهاالیه سمت راست این قطر قرارگرفته شروع می‌شوند و به عددی که روی همان قطر راستی که a قرار دارد ختم می‌شوند (شکل ۸۵ را ببینید).



شکل ۸۵

مسألهٔ ۲۹. ثابت کنید هر عدد در مثلث پاسکال مانند a منهای ۱ برابر است با مجموع عددهایی که درون متوازی‌الاضلاعی که به ضلعهای مثلث و قطرهایی که از a می‌گذرند محدود است قرار دارند (عددهایی را که روی این قطرها قرار دارند در نظر نمی‌گیریم؛ شکل ۸۶ را ببینید).



شکل ۸۶

مسألهٔ ۳۰*. ثابت کنید

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$$

۳. توپها و جدارها

در ابتدا دو مسألهٔ جالب را بررسی می‌کنیم. هر دو این مسأله‌ها را می‌توان یکراست از طریق شمارش سخت و پیچیده هم حل کرد (این راه را هم امتحان کنید، اما بعداً). از طرف دیگر، می‌توان مسأله را به‌گونه‌ای تعبیر کرد که نسبتاً راحت به جواب (که در هر دو مورد تعداد ترکیبهاست) رسید.

مسألهٔ ۳۱. شش جعبه را از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری کرده‌ایم. به چند طریق می‌توان ۲۰ توپ یکسان را در این جعبه‌ها طوری قرار داد که هیچ‌کدام خالی نماند؟

راه‌حل. توپها را در یک ردیف بچینید. برای مشخص کردن نحوهٔ توزیع توپها در جعبه‌ها باید این ردیف را با استفاده از پنج جدار به شش گروه افراز کنیم: گروه اول برای جعبهٔ اول، گروه دوم برای جعبهٔ دوم، و همین‌طور در مورد بقیه (شکل ۸۷ را ببینید). بنابراین، تعداد راههای توزیع توپها در جعبه‌ها برابر است با تعداد راههای قرار دادن پنج جدار در فاصلهٔ میان توپها. هر جدار را می‌توان در یکی از ۱۹ شکاف موجود قرار داد ($1 - 20$ یا ۱۹ فاصله میان ۲۰ توپ وجود دارد) و هیچ دو تایی از آنها را نمی‌توان در یک شکاف قرار داد (زیرا این کار یعنی اینکه یکی از جعبه‌ها خالی بماند). بنابراین تعداد راههای افراز برابر با $\binom{19}{5}$ است.



شکل ۸۷

تمرین. به چند طریق می‌توان n توپ یکسان را در m جعبه که از ۱ تا m شماره خورده‌اند طوری قرار داد که هیچ جعبه‌ای خالی نماند؟

مسألهٔ ۳۲. شش جعبه را از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری کرده‌ایم. به چند طریق می‌توان ۲۰ توپ یکسان را در این جعبه‌ها توزیع کرد (این بار ممکن است بعضی جعبه‌ها خالی بمانند)؟

راه‌حل. ردیفی از ۲۵ شیء در نظر بگیرید: ۲۰ توپ یکسان و ۵ جدار یکسان، که به‌طور دلخواه مرتب شده‌اند. هر چنین ردیفی بی‌هیچ ابهامی نظیر یکی از راههای افراز توپهاست: توپهایی که سمت چپ جدار اول قرارگرفته‌اند در جعبهٔ اول قرار می‌گیرند؛ توپهایی که بین جدار اول و جدار دوم قرارگرفته‌اند در جعبهٔ دوم قرار می‌گیرند، و همین‌طور در مورد بقیه (ممکن است دو تا از جدارها در این ردیف کنار هم باشند، که یعنی جعبهٔ نظیرشان خالی است). بنابراین، تعداد راههای افراز توپها برابر است با ردیفهایی که می‌توان از ۲۰ توپ و ۵ جدار تشکیل داد؛ یعنی، برابر است با $\binom{۲۵}{۵}$ (هر سطر با جاهایی که جدارها قرارگرفته‌اند کاملاً مشخص می‌شود).

خاطرنشان می‌کنیم که راه‌حل دیگری برای مسألهٔ ۳۱ به‌طریق زیر به‌دست می‌آید: در هر جعبه یک توپ قرار دهید (برای اینکه هیچ جعبه‌ای خالی نماند)، سپس از نتیجهٔ مسألهٔ ۳۲ (در مورد ۱۴ توپ به‌جای ۲۰ توپ) استفاده کنید.

با استفاده از ایده‌هایی که ضمن حل کردن دو مسألهٔ بالا پیدا کردیم می‌توانیم مسألهٔ نسبتاً دشوارتر زیر را بسیار استادانه حل کنیم.

مسألهٔ ۳۳. به چند طریق می‌توان عدد طبیعی n را به شکل مجموع

الف) k عدد طبیعی نوشت؟

ب) k عدد صحیح نامنفی نوشت؟

راهنمایی: n را به‌شکل مجموع n تا ۱ بنویسید:

$$n = ۱ + ۱ + \cdots + ۱$$

این n تا یک را «توپها» و k تا جمعوند را «جعبه‌ها» درنظر بگیرید. جوابها چنین‌اند: الف) $\binom{n-۱}{k-۱}$؛ ب) $\binom{n+k-۱}{n}$.

یادداشت. راه‌حلهایی که دیده‌ایم باز هم نشان می‌دهند که فرمولبندی مجدد خوب حکم مسأله تا چه حد ممکن است مهم باشد. دلیل اینکه مسألهٔ توزیع توپها در جعبه‌ها را اینقدر کامل بررسی کردیم این است که چنین فرمولبندیهای مجددی (وارد کردن «جدارها» و غیره) برای حل کردن مسأله‌هایی کاملاً متفاوت، نه‌تنها در ترکیبیات، بلکه در سایر شاخه‌های ریاضی و به‌طورکلیتر در علوم، بسیار مفید است.

مسألهٔ ۳۴. به چند طریق می‌توان ۱۲ سکهٔ یک ریالی را در پنج کیف پول مختلف طوری قرار داد که هیچ‌کدام از آنها خالی نماند؟

مسألهٔ ۳۵. صحافی می‌خواهد ۱۲ کتاب یکسان را با جلدهایی به‌رنگ قرمز، سبز یا آبی جلد کند. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

مسألهٔ ۳۶. به چند طریق می‌توان گردنبندی (به‌شکل دایره‌ای کامل) را که ۳۰ قطعه مروارید در آن به‌کار رفته است به ۸ قسمت تقسیم کرد (فقط می‌توان گردنبند را از جاهایی میان مرواریدها برید)؟

مسألهٔ ۳۷. سی نفر به ۵ نامزد احراز پستی رأی می‌دهند. اگر هر یک از آنها به یکی از نامزدها رأی دهد چند ترکیب از نظر تعداد رأیهایی که ممکن است به هر یک از نامزدها داده شود وجود دارد؟

مسألهٔ ۳۸. در فروشگاهی ۱۰ نوع کارت تبریک وجود دارد. به چند طریق می‌توان

الف) ۱۲ کارت تبریک خرید؟

ب) ۸ کارت تبریک خرید؟

مسألهٔ ۳۹. قطاری با m نفر مسافر باید در n ایستگاه توقف کند.

الف) مسافران به چند طریق ممکن است در ایستگاهها از قطار پیاده شوند؟

ب) اگر فقط تعداد مسافرانی را که در هر ایستگاه پیاده می‌شوند در نظر بگیریم، به سؤال قسمت (الف) جواب دهید.

مسألهٔ ۴۰. درکیفی ۲۰ سکهٔ یک تومانی، ۲۰ سکهٔ پنج تومانی و ۲۰ سکهٔ ده تومانی قرار دارد. به چند طریق می‌توانیم ۲۰ سکه از این ۶۰ سکه انتخاب کنیم؟

مسألهٔ ۴۱. به چند طریق می‌توان هفت توپ سفید و دو توپ سیاه را در نه جعبه قرار داد؟ می‌توان برخی جعبه‌ها را خالی گذاشت و جعبه‌ها متمایزند.

مسألهٔ ۴۲. سه نفر به چند طریق می‌توانند شش سیب یک‌شکل، یک پرتقال، یک آلو و یک نارنگی را میان خودشان تقسیم کنند (با این شرط که میوه‌ها را نبرند)؟

مسألهٔ ۴۳. به چند طریق می‌توان چهار توپ سیاه، چهار توپ سفید و چهار توپ آبی را در شش جعبهٔ مختلف گذاشت؟

مسألهٔ ۴۴. جماعتی n نفره نماینده‌شان را با رأی‌گیری انتخاب می‌کنند.

الف) اگر هرکسی به یک نفر (که ممکن است خودش هم باشد) رأی دهد، به چند طریق می‌توان نتیجهٔ رأی‌گیری را «علنی» کرد؟ رأی‌گیری علنی یعنی اینکه نه‌تنها رأیهای کسب‌شدهٔ هر کس را می‌گوییم، بلکه نام کسانی را که به هرکس رأی داده‌اند هم می‌گوییم.

ب) اگر رأی‌گیری علنی نباشد (و فقط تعداد رأیهای داده شده به هر نفر را اعلام کنیم)، به سؤال قسمت (الف) پاسخ دهید.

مسألهٔ ۴۵. به چند طریق می‌توان پنج توپ قرمز، پنج توپ آبی و پنج توپ سبز را طوری در یک ردیف چید که هیچ دو توپ آبی‌ای پشت سر هم قرار نداشته باشند؟

مسألهٔ ۴۶*. به چند طریق می‌توان عدد ۱۰۰۰۰۰۰ را به شکل حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی نوشت (حاصل‌ضربهایی را که ترتیب ضرب عاملهایشان متفاوت است متمایز درنظر می‌گیریم)؟

مسألهٔ ۴۷*. ۱۲ کتاب در قفسه‌ای چیده شده است. به چند طریق می‌توان پنج تا از این کتابها را طوری انتخاب کرد که از کتابهای انتخاب‌شده هیچ دو تایی در قفسه کنار هم نبوده باشند؟

۴*. قضیهٔ دوجمله‌ای نیوتن

توصیه به معلمان. این بخش را ستاره‌دار کرده‌ایم، زیرا برای دانش‌آموزان دورهٔ راهنمایی نسبتاً دشوار است. با وجود این، تصمیم گرفتیم که این فصل را حذف نکنیم، زیرا مطالبی خیلی نزدیک به عددهایی مانند $\binom{n}{k}$ و مثلث پاسکال دارد. البته بی‌هیچ شکی قضیهٔ دوجمله‌ای جزئی ضروری برای آموزش ریاضی است، هر چند که می‌توان آموزش آن را به بعد موکول کرد.

یادداشت. این موضوع به ترکیبیات ربط دارد، اما مبحثی جدا از آن است. با این وجود، بهتر است که صورت و اثبات قضیهٔ اصلی آن را در اینجا بیاوریم، زیرا در ترکیبیات مکرر از آن استفاده می‌کنند و در اثباتش هم ایده‌های ترکیبیاتی به‌کار می‌آید.

اتحاد

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

را همه می‌شناسند.

می‌خواهیم دستوری به‌دست بیاوریم که با استفاده از آن بتوانیم دوجمله‌ای $(a+b)$ را به هر توانی با نمای صحیح و نامنفی برسانیم. چند توان متوالی دوجمله‌ای موردنظر را بنویسید:

$$\begin{aligned}
(a+b)^۰ &= ۱ \\
(a+b)^۱ &= a + b \\
(a+b)^۲ &= a^۲ + ۲ab + b^۲ \\
(a+b)^۳ &= a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳
\end{aligned}$$

معلوم است که ضریبهای عبارتهای سمت راست این اتحادها سطرهای متناظر مثلث پاسکال را

تشکیل می‌دهند. بنابراین می‌توانیم حدس بزنیم که اتحاد زیر درست است:

$$(a+b)^n = \binom{n}{۰}a^n + \binom{n}{۱}a^{n-۱}b^۱ + \binom{n}{۲}a^{n-۲}b^۲ + \cdots$$
$$+ \binom{n}{n-۱}a^۱b^{n-۱} + \binom{n}{n}b^n$$

در حقیقت، این اتحاد درست است و این بسط را قضیهٔ دوجمله‌ای نیوتن می‌نامند. برای اثبات این قضیه، حاصل‌ضرب

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)(a+b)$$

را بدون اینکه جمله‌های متشابه را دسته‌بندی کنیم و بدون اینکه ترتیب عاملها را در هر یک از یک‌جمله‌ایها تغییر دهیم بسط می‌دهیم. مثلاً،

$$(a+b)(\underline{a}+\underline{b})(\bar{a}+\bar{b})$$
$$= a\underline{a}\bar{a} + a\underline{a}\bar{b} + a\underline{b}\bar{a} + a\underline{b}\bar{b} + b\underline{a}\bar{a} + b\underline{a}\bar{b} + b\underline{b}\bar{a} + b\underline{b}\bar{b}$$

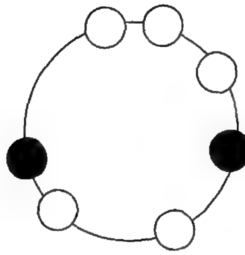
اکنون ضریب جملهٔ $a^{n-k}b^k$ را پس از ساده کردن جمله‌های متشابه پیدا می‌کنیم. معلوم است که این ضریب برابر با تعداد یک‌جمله‌ایهایی است که b دقیقاً k بار (و a دقیقاً $n-k$ بار) در آنها آمده است. این تعداد برابر است با $\binom{n}{k}$، زیرا این عدد برابر است با تعداد راههای انتخاب کردن k جا برای قرار دادن حرف b.

تمرین. قضیهٔ دوجمله‌ای را به استقرا ثابت کنید.

۴. چند مسألهٔ دیگر

توصیه به معلمان. مطالعهٔ این بخش اختیاری است، زیرا مطلب جدید مهمی ندارد و صرفاً تعدادی مسأله در آن آورده‌ایم. از گنجاندن این بخش در این فصل دو هدف را در نظر داشته‌ایم. اول اینکه مسأله‌های زیادتری را برای کلاس فراهم کرده باشیم. دوم اینکه پس از آموختن ایده‌های اصلی ترکیبیات بهتر است که بارها و بارها آنها را مرور کرد. این کار را می‌توان در جلسه‌های جداگانه، المپیادهای ریاضی، «پیکارهای ریاضی» و رویدادهایی از این قبیل انجام داد. می‌توان از مسأله‌های زیر برای جلسه‌های دوره کردن یا مسابقه‌ها استفاده کرد.

مسألهٔ ۴۸. با استفاده از ۵ مهرهٔ قرمز یک‌جور و ۲ مهرهٔ آبی یک‌جور چند گردنبند می‌توان ساخت؟ (شکل ۸۸ را ببینید).



شکل ۸۸

مسألۀ ۴۹. الف) باشگاهی ۳۰ نفر عضو دارد و مربی باشگاه باید ۴ نفر را برای شرکت در مسابقۀ دو ۱۰۰۰ متر انتخاب کند. به چند طریق می‌توان این کار را کرد؟

ب) به چند طریق می‌توان تیمی چهارنفره برای دو امدادی

۴۰۰متر + ۳۰۰متر + ۲۰۰متر + ۱۰۰متر

انتخاب کرد؟

مسألۀ ۵۰. در چند «کلمۀ» شش حرفی (انگلیسی) دست‌کم یک حرف A به‌کار رفته است (هر دنباله از حرفها را کلمه به‌حساب می‌آوریم)؟

مسألۀ ۵۱. به چند طریق می‌توان مسیر شکستۀ بسته‌ای با پاره‌خطهایی که رأسهایشان رأسهای شش‌ضلعی‌ای منتظم‌اند رسم کرد (اشکالی ندارد که پاره‌خطها یکدیگر را قطع کنند)؟

مسألۀ ۵۲. با استفاده از رقمهای ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد چهار رقمیِ بخش‌پذیر بر ۴ می‌توان نوشت، به‌شرطی که

الف) از هر رقم فقط یک بار استفاده کنیم.

ب) از هر رقم هر چند بار که بخواهیم بتوانیم استفاده کنیم.

مسألۀ ۵۳. پدری ۲ سیب و ۳ گلابی دارد. او از شنبه تا چهارشنبه یکی از این میوه‌ها را به دخترش می‌دهد. به چند طریق می‌تواند این کار را بکند؟

مسألۀ ۵۴. گروه تئاتری ۳۰ بازیگر دارد. به چند طریق می‌توان دو گروه شش‌نفره از بازیگران را برای دو اجرای یک نمایش طوری انتخاب کرد که هیچ‌یک از بازیگران در هر دو اجرا حضور نداشته باشد؟

مسألۀ ۵۵. مجموع همۀ عددهای سه‌رقمی را که می‌توان با رقمهای ۱، ۲، ۳ و ۴ نوشت پیدا کنید (تکرار رقمها اشکالی ندارد).

مسألهٔ ۵۶. از هر یک از رنگهای قرمز، آبی، سبز و زرد ۱۳ کارت داریم و روی کارتهای هر یک از رنگها هم عددهای ۱ تا ۱۳ را نوشته‌ایم. به چند طریق می‌توانیم شش تا از این ۵۲ کارت را طوری انتخاب کنیم که از هر رنگ کارتی انتخاب شده باشد؟

مسألهٔ ۵۷. به چند طریق می‌توان یک سکهٔ ۱ تومانی و ده سکهٔ بیست و پنج تومانی را در چهار جعبهٔ متمایز قرار داد؟

مسألهٔ ۵۸. تعداد عددهای صحیح از ۰ تا ۹۹۹۹۹۹ را پیدا کنید که در نمایش اعشاری آنها هیچ دو رقم کنار هم برابری وجود نداشته باشد.

مسألهٔ ۵۹. از هر یک از رنگهای قرمز، آبی، سبز و زرد ۹ کارت داریم و روی کارتهای هر یک از رنگها هم عددهای ۱ تا ۹ را نوشته‌ایم. به چند طریق می‌توانیم این ۳۶ کارت را به دو دسته طوری تقسیم کنیم که در هر دسته دقیقاً دو تا از کارتهایی که روی آنها عدد ۱ نوشته شده است وجود داشته باشد؟

مسألهٔ ۶۰. رخی در آخرین خانهٔ سمت چپ نواری 30×1 از خانه‌ها قرارگرفته است و در هر حرکت می‌توان آن را هر تعداد از خانه‌ها که بخواهیم به سمت راست حرکت دهیم.

الف) به چند طریق می‌توان رخ را به آخرین خانهٔ سمت راست برد؟

ب) به چند طریق می‌توان با هفت حرکت، رخ را به آخرین خانهٔ سمت راست برد؟

مسألهٔ ۶۱. در هر طرف قایقی دقیقاً چهار قایقران می‌توانند بنشینند. به چند طریق می‌توان تیمی از قایقرانان از میان ۳۱ نفر داوطلب انتخاب کرد، به شرطی که ده نفر از آنان بخواهند در طرف چپ قایق بنشینند، دوازده نفر بخواهند در طرف راست قایق بنشینند و نه نفر بقیه هم طرف خاصی را درنظر نداشته باشند؟

مسألهٔ ۶۲*. در جدولی از m سطر و n ستون، خانهٔ محل برخورد سطر pام و ستون qام را علامت گذاشته‌ایم. چند تا از مستطیلهایی که از خانه‌های این جدول تشکیل شده‌اند این خانهٔ علامت‌دار را در بر دارند؟

مسألهٔ ۶۳*. مکعبی $10 \times 10 \times 10$ از مکعبهای واحد تشکیل شده است. ملخی در مرکز یکی از مکعبهای گوشه‌ای، که آن را نقطهٔ O می‌نامیم، نشسته است. ملخ در هر لحظه می‌تواند به مرکز یکی از مکعبهایی که وجهی مشترک با مکعبی که در آن نشسته دارد بپرد، به شرط اینکه با این پرش فاصلهٔ نقطهٔ O تا جایی که ملخ در آن نشسته بیشتر شود. این ملخ به چند طریق می‌تواند به مکعب واحدی که در گوشهٔ مقابل قرار گرفته است برود؟

فصل ۱۲

ناورداها

۱. مقدمه

معلم: «بیایید بازی کنیم. همان‌طور که می‌بینید، ۱۱ عدد روی تخته‌سیاه وجود دارد ـ شش‌تا صفر و پنج‌تا یک. عمل زیر را ۱۰ بار انجام دهید: دو تا از عددها را خط بزنید. اگر این دو عدد برابر بودند یک صفر دیگر روی تخته‌سیاه بنویسید و اگر برابر نبودند، یک عدد یک دیگر بنویسید. در دفترتان به هر ترتیبی که دلتان می‌خواهد این کار را انجام دهید. تمام شد؟ اکنون به شما می‌گویم که چه عددی دارید. عددتان باید . . . یک باشد!»

پس از این بازی کوتاه یک سؤال به‌طور طبیعی پیش می‌آید: معلم ازکجا می‌داند که عدد دانش‌آموزان در پایان بازی کدام عدد است؟ در حقیقت، می‌توان بازی را به طرق مختلف انجام داد، اما چه چیزی همواره یکسان است: پس از هر بار خط زدن و عدد نوشتن، مجموع عددهای روی تخته‌سیاه (یا در دفتر) عددی فرد است. به‌سادگی می‌توان این مطلب را تحقیق کرد، زیرا مجموع موردنظر یا اصلاًکم یا زیاد نمی‌شود یا ۲ تاکم یا زیاد می‌شود. مجموع اولیه عددی فرد است، در نتیجه، پس از ۱۰ بار خط زدن و عدد نوشتن، تنها عددی که باقی می‌ماند هم باید فرد باشد. برای توضیح این وضعیت، احتمالاً نمی‌توان از چیزی بجز کلمهٔ جادویی «ناوردا» استفاده کرد.

خوب، «ناوردا» چه چیزی است؟ طبیعتاً، چیزی است که ناورداست، یعنی تغییر نمی‌کند ـ مانند زوجیت مجموع عددها در مثال قبل.

مثال دیگری از ناوردا می‌آوریم:

مسألهٔ ۱. در زبان Ao-Ao فقط دو حرف وجود دارد: A و O. علاوه بر این، قوانین زیر در این زبان رعایت می‌شوند: اگر دو حرف کنار هم AO را از کلمه‌ای حذف کنید، کلمه‌ای به‌دست می‌آورید که معنی‌اش همان قبلی است. به همین ترتیب، اگر ترکیبهای OA یا AAOO را هر جایی در کلمه‌ای

بگنجانید معنایش عوض نمی‌شود. آیا می‌توانیم مطمئن باشیم که معنی کلمه‌های AOO و OAA یکسان است؟

راه‌حل. توجه کنید که در حذف یا اضافه کردن هر ترکیبی از حرفها، تعداد Aها در این ترکیب با تعداد Oها برابر است. یعنی اینکه تفاضل تعداد Aها و تعداد Oها ناورداست. به مثال زیر توجه کنید

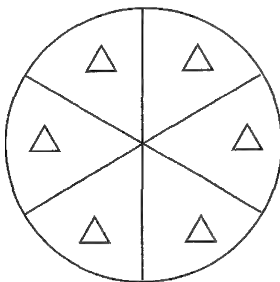
$$\mathrm{O} \to \mathrm{OOA} \to \mathrm{OAAOOOA} \to \mathrm{OAOOA}$$

در همهٔ این کلمه‌ها تعداد Oها از تعداد Aها یکی بیشتر است. راه‌حل را پی‌می‌گیریم. تفاضل موردنظر در مورد کلمهٔ AOO برابر با ۱− و در مورد کلمهٔ OAA برابر با ۱ است. بنابراین، نمی‌توانیم با استفاده از عملهای مجاز کلمهٔ OAA را از کلمهٔ AOO به‌دست بیاوریم، و نمی‌توانیم ادعا کنیم که این کلمه‌ها مترادف‌اند.

در این راه‌حل ایدهٔ اصلی مربوط به ناورداها را توضیح داده‌ایم. چند شیء داریم و مجازیم که عملیاتی را روی این اشیا انجام دهیم. سؤال این است: آیا می‌توان با استفاده از این عملیات یکی از این اشیا را از دیگری به‌دست آورد. برای پاسخ دادن به این سؤال کمیتی را مشخص می‌کنیم که تحت عملیات مجاز تغییر نمی‌کند؛ به عبارت دیگر، ناورداست. اگر مقدار این کمیت برای دو شیء موردنظر برابر نباشد، پاسخ منفی است ـ یعنی نمی‌توانیم یکی از اشیا را از دیگری به‌دست بیاوریم.

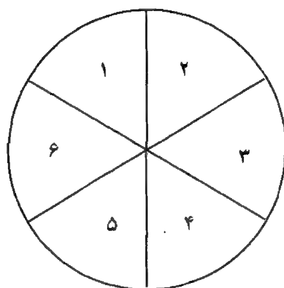
مسألهٔ دیگری را بررسی می‌کنیم:

مسألهٔ ۲. دایره‌ای را به ۶ قطاع تقسیم کرده‌ایم (شکل ۸۹ را ببینید) و در هر یک از آنها یک سرباز قرار داده‌ایم. می‌توانیم هر دو تا از سربازها را همزمان به قطاعی که مرز مشترک با قطاعی که روی آن قرار دارند ببریم. آیا با این کار می‌توانیم همهٔ سربازها را در یک قطاع جمع کنیم؟



شکل ۸۹

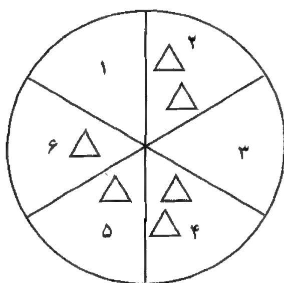
راه‌حل. قطاعها را در جهت ساعتگرد با عددهای از ۱ تا ۶ شماره‌گذاری می‌کنیم (شکل ۹۰ را ببینید) و به‌ازای هر آرایشی از سربازها درون دایره، مجموع عددهای قطاعهایی را که در آنها سرباز قرار دارد در نظر می‌گیریم (تکراریها را هم می‌شماریم). این مجموع را S بنامید.



شکل ۹۰

مثال. در مورد آرایش نشان داده شده در شکل ۹۱،

$$S = ۲ + ۲ + ۴ + ۴ + ۵ + ۶ = ۲۳$$



شکل ۹۱

وقتی که سربازی را به یکی از قطاعهای مجاورش منتقل می‌کنیم، زوجیت جمعوند متناظرش در S عوض می‌شود (از فرد به زوج، یا از زوج به فرد). بنابراین، اگر دو تا از سربازها را همزمان حرکت دهیم، زوجیت S هیچ‌گاه عوض نمی‌شود ـ یعنی ناورداست. در مورد آرایش شکل ۸۹ مقدار S برابر با ۲۱ است. اگر همهٔ سربازها در قطاعی به شمارهٔ A باشند، آن‌وقت $S = ۶A$. پس S عددی زوج است، اما ۲۱ فرد است. بنابراین نمی‌توانید آرایش اولیه را به آرایشی تبدیل کنید که در آن همهٔ سربازها در یک قطاع قرار داشته باشند.

گاهی ممکن است نتوان از ناورداها برای اثبات اینکه نمی‌توان شیءای را از دیگری به‌دست آورد استفاده کرد، اما می‌توان به‌کمک آنها فهمید که کدام شیء را می‌توان از شیءای مفروض به‌دست آورد. این موضوع را در مسألهٔ زیر روشن کرده‌ایم.

مسألهٔ ۳. عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۱۹ و ۲۰ را روی تخته‌سیاه نوشته‌ایم. می‌توانیم دو عدد دلخواه مانند

a و b را پاک کنیم و به‌جای آنها عدد جدید $a+b-۱$ را روی تخته بنویسیم. پس از ۱۹ بار تکرار این عمل چه عددی روی تخته‌سیاه می‌ماند؟

راه‌حل. به‌ازای هر گردایه‌ای از n عدد روی تخته‌سیاه فرض کنید X برابر با مجموع این عددها منهای n باشد. فرض کنید عددهای روی تخته‌سیاه را به‌طریقی که گفتیم تبدیل کرده‌ایم. مقدار X چه تغییری می‌کند؟ اگر مجموع همهٔ عددها بجز a و b برابر با S باشد، پیش از تبدیل $X = S + a + b - n$ و پس از تبدیل

$$X = S + (a+b-۱) - (n-۱) = S + a + b - n$$

در نتیجه، مقدار X همواره یکسان است، یعنی ناورداست. در ابتدا (در مورد عددهای گفته شده در صورت مسأله)،

$$X = (۱ + ۲ + \cdots + ۱۹ + ۲۰) - ۲۰ = ۱۹۰$$

بنابراین، پس از ۱۹ بار انجام عمل گفته شده، وقتی که فقط یک عدد روی تخته‌سیاه باقی مانده است، X برابر با ۱۹۰ است. یعنی عدد آخر، که برابر با $X+۱$ است، برابر با ۱۹۱ است.

توصیه به معلمان. اگر راه‌حل این مسأله را یکی از دانش‌آموزانتان برایتان بگوید، احتمالاً چیزی شبیه به این می‌شنوید: در هر مرحله مجموع همهٔ عددها یکی کم می‌شود. ۱۹ مرحله وجود دارد و در ابتدا مجموع برابر با ۲۱۰ است. بنابراین، در انتها، مجموع برابر است با

$$۲۱۰ - ۱۹ = ۱۹۱$$

این راه‌حل درست است؛ با این همه، باید توضیح دهید که این مسأله، مسأله‌ای از «ناوردا»هاست. موضوع این است که در این حالت، ناوردا آنقدر ساده است که می‌توان آن را کاملاً بدیهی توصیف کرد. در مسألهٔ بعد، هرچند که شبیه مسألهٔ ۳ است، نمی‌توان چنین راه‌حل ساده‌ای پیدا کرد.

مسألهٔ ۴. عددهای ۱، ۲، ... و ۲۰ روی تخته‌سیاه نوشته شده‌اند. می‌توانیم دو عدد دلخواه مانند a و b را پاک کنیم و به‌جای آنها عدد جدید $a+b+ab$ را بنویسیم. پس از ۱۹ بار تکرار این عمل کدام عدد روی تخته‌سیاه می‌ماند؟

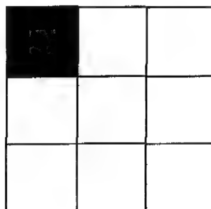
راهنمایی: مقداری که از جمع کردن هر عدد با ۱ و ضرب کردن نتیجه‌ها به‌دست می‌آید ناورداست.

در اینجا چند مسألهٔ فوق‌العاده که در راه‌حل آنها از روش ناورداها استفاده می‌شود آورده‌ایم.

مسألهٔ ۵. شش گنجشک روی شش درخت نشسته‌اند، روی هر درخت یک گنجشک. درختان در یک ردیف قرار گرفته‌اند و فاصلهٔ هر دو درخت مجاور ۱۰ متر است. اگر گنجشکی از یکی از درختها به درختی دیگر پرواز کند، همزمان با او گنجشک دیگری از درختی به درختی دیگر که فاصله‌شان به‌اندازهٔ دوتای قبلی است پرواز می‌کند، البته در جهت مخالف. آیا ممکن است که هر شش گنجشک روی یک درخت جمع شوند؟ اگر هفت درخت و هفت گنجشک داشته باشیم چطور؟

مسألهٔ ۶. در جدولی ۸ × ۸ یکی از خانه‌ها را سیاه کرده‌ایم، بقیهٔ خانه‌ها را سفید. ثابت کنید نمی‌توان با تغییر رنگ سطرها و ستونها همهٔ خانه‌ها را به رنگ سفید درآورد. «تغییر رنگ» عملی است که رنگ همهٔ خانه‌های سطر یا ستون را عوض می‌کند.

مسألهٔ ۷. مسألهٔ قبل را در مورد جدولی ۳ × ۳ حل کنید، که در آن در ابتدا یک خانهٔ سیاه در یکی از گوشه‌های جدول وجود دارد (شکل ۹۲ را ببینید).



شکل ۹۲

مسألهٔ ۸. مسألهٔ ۶ را در مورد جدولی ۸ × ۸ حل کنید، که در آن در ابتدا هر چهار خانهٔ گوشه‌ای سیاه‌اند و بقیهٔ خانه‌ها سفید.

توجه کنید که مسألهٔ ۶ را، برخلاف مسأله‌های ۷ و ۸، فقط با استفاده از زوجیت (تعداد خانه‌های سیاه) هم می‌توان حل کرد.

مسألهٔ ۹. عددهای ۱، ۲، ۳، . . . و ۱۹۸۹ را روی تخته‌سیاه نوشته‌ایم. می‌توانیم هر دو تا از این عددها را که بخواهیم پاک کنیم و به‌جای آنها تفاضلشان را بنویسیم. آیا می‌توان با تکرار این کار به‌وضعیتی رسید که همهٔ عددهای روی تخته‌سیاه صفر باشند؟

مسألهٔ ۱۰. در جزیرهٔ ملونها ۱۳ آفتاب‌پرست خاکستری، ۱۵ آفتاب‌پرست قهوه‌ای و ۱۷ آفتاب‌پرست قرمز زندگی می‌کنند. اگر دو آفتاب‌پرست به رنگهای مختلف به هم برسند، رنگشان به‌رنگ سوم درمی‌آید (مثلاً خاکستری و قهوه‌ای به رنگ قرمز درمی‌آیند). آیا ممکن است پس از گذشت چند وقت همهٔ آفتاب‌پرستهای این جزیره به یک رنگ درآیند؟

راه‌حل مسألهٔ ۱۰ را بررسی می‌کنیم. چگونه می‌توانیم معنی «عددی» تبدیل موردنظر را توصیف کنیم. یک راه این است که بگوییم دو آفتاب‌پرست به رنگهای مختلف «ناپدید» می‌شوند و دو آفتاب‌پرست به رنگ سوم «پدیدار» می‌شوند. اگر بخواهیم از ناوردایی عددی استفاده کنیم، می‌توانیم به‌دنبال مقداری برگردیم که فقط به عددهای (a,b,c) بستگی دارد، که در اینجا a، b و c به‌ترتیب تعداد آفتاب‌پرستهای خاکستری، قهوه‌ای و قرمزند. تبدیلی که در صورت مسأله گفته شده یعنی اینکه سه‌تایی (a,b,c) به سه‌تایی $(a-۱, b-۱, c+۲)$ یا سه‌تایی $(a-۱, b+۲, c-۱)$ یا سه‌تایی $(a+۲, b-۱, c-۱)$، بسته به اینکه رنگ اولیهٔ دو آفتاب‌پرستی که به هم می‌رسند چه باشد، تبدیل می‌شود. معلوم است که تفاضل میان عددهای متناظر در سه‌تاییهای قدیم و جدید یا تغییر نمی‌کند یا ۳ تا تغییر می‌کند، یعنی اینکه باقی‌ماندهٔ این تفاضلها در تقسیم بر ۳ ناورداست. در ابتدا،

$$a-b=۱۳-۱۵=-۲$$

و اگر همهٔ آفتاب‌پرستها قرمز باشند، باید

$$a-b=۰-۰=۰$$

باقی‌ماندهٔ عددهای ۰ و ۲− در تقسیم بر ۳ متفاوت است، یعنی ممکن نیست که همهٔ آفتاب‌پرستها به رنگ قرمز درآیند. حالتهایی که همهٔ آفتاب‌پرستها به رنگ خاکستری یا قهوه‌ای درآیند دقیقاً به همین ترتیب بررسی می‌شوند.

توصیه به معلمان. اگر «زوجیت» را قبلاً مطالعه کرده‌اید و راه‌حلهایی را که در آنها زوجیت ناورداست بررسی کرده‌اید، این موضوع را به دانش‌آموزان گوشزد کنید.

«ناورداها» ماهیت نسبتاً انتزاعی دارند و حتی اساسِ آنها معمولاً برای دانش‌آموزان مبهم و پیچیده می‌ماند. بنابراین باید توجه خاصی به بررسی منطق استفاده از ناورداها در حل مسأله‌ها مبذول کنیم. با آوردن مثالهای گوناگون، راه‌حلها را توضیح دهید، و تا جایی‌که ممکن است توضیحاتتان را واضح و روشن بیان کنید. مطابق معمول، پس از اینکه دانش‌آموزان چند مسأله را با استفاده از ناورداها حل کردند یا دست‌کم چند مسألهٔ ساده را با استفاده از ناورداها بررسی کردند کلمهٔ جدید «ناوردا» و اساس ایده‌های مربوط به آن را مطرح کنید.

معلوم است که مشکل اصلی در حل‌کردن مسأله‌ها با استفاده از ناورداها یافتن کمیتی ناورداست. هنر واقعی همین است، و فقط وقتی می‌توان در آن تبحر یافت که مسأله‌های مشابه زیادی را حل کرد. تفکراتتان را محدود نکنید. در هر حال، قوانین سادهٔ زیر را فراموش نکنید:

الف) کمیتی که به‌دست آورده‌ایم در حقیقت باید ناوردا باشد.

ب) مقدار این ناوردا برای دو شیء‌ای که در صورت مسأله داده شده‌اند باید فرق کند.

ج) در ابتدا باید رده‌ای از اشیا را مشخص کنیم که این کمیت برای آنها تعریف شده باشد.

مثال مهم دیگری می‌آوریم.

مسألهٔ ۱۱. عددهای ۱+ و ۱− را طوری روی رأسهای ۱۲ضلعی منتظمی نوشته‌ایم که روی همهٔ رأسها بجز یکی از آنها ۱+ قرار دارد. می‌توانیم علامت عددهای هر k رأس متوالی ۱۲ضلعی را عوض کنیم. اگر

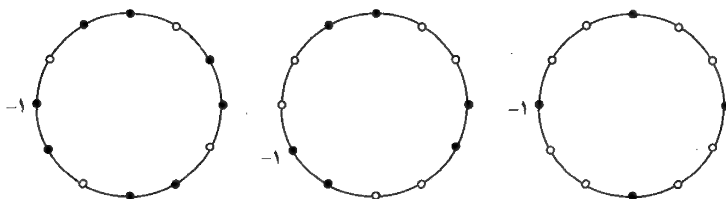
الف) $k = ۳$

ب) $k = ۴$

ج) $k = ۶$

آیا می‌توانیم تنها عدد ۱− موجود را به رأس مجاور «منتقل» کنیم؟

خلاصهٔ راه‌حل. در هر سه حالت پاسخ منفی است. اثبات هر سه هم یکجور است: زیرمجموعه‌ای از رأسها را طوری انتخاب می‌کنیم که در میان هر k رأس متوالی یک تعداد از این رأسها قرار داشته باشد (شکل ۹۳ را ببینید).



شکل ۹۳

تحقیق کنید که زیرمجموعه‌هایی که در شکل بالا نشان داده شده‌اند این ویژگی را دارند.

ناوردا را حاصل‌ضرب عددهای نوشته شده روی رأسهای انتخاب شده می‌گیریم. در ابتدا، این مقدار برابر با ۱− است، اما اگر ۱− به رأس مجاور سمت چپ، که در میان رأسهای انتخاب شده نیست، «منتقل» شود، این مقدار برابر با ۱ است. ناوردا بودن مقدار گفته شده از نحوهٔ انتخاب زیرمجموعهٔ انتخاب شده نتیجه می‌شود.

توصیه به معلمان. در این راه‌حل ایده‌ای متداول در روش استفاده از ناورداها وجود دارد ـ بخشی از هر شیء را انتخاب کنید که تغییراتی که بر اثر تبدیلهای مجاز در آنها ایجاد می‌شود به‌سادگی توصیف می‌شوند.

یادداشت. با استفاده از این ایده می‌توانیم مسأله‌های ۷ و ۹ را هم حل کنیم.

راستی، می‌توانید از دانش‌آموزانتان سؤالی «گول‌زننده» کنید: ثابت کرده‌ایم که ۱− را نمی‌توان به رأس مجاور سمت چپ منتقل کرد. آیا می‌توان آن را به رأس مجاور سمت راست منتقل کرد؟

۲. رنگ کردن

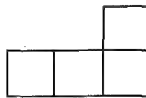
خیلی از مسأله‌های مربوط به ناورداها را می‌توان با نوع خاصی از ناورداها حل کرد: چیزی که اصطلاحاً به آن «رنگ کردن» می‌گویند. مسألهٔ زیر مثالی متعارف در این‌باره است.

مسألهٔ ۱۲. مهرهٔ خاصی از شطرنج به نام «شتر» در صفحه‌ای ۱۰ × ۱۰ مانند اسبِ (۱, ۳) حرکت می‌کند. یعنی، به یکی از خانه‌های مجاور می‌رود و سپس در یکی از امتدادهای عمودی سه خانه حرکت می‌کند (اسب معمولی شطرنج را می‌توان از نوع (۱, ۲) حساب کرد). آیا «شتر» می‌تواند از یکی از خانه‌ها به خانه‌ای مجاور برود؟

راه‌حل. پاسخ منفی است. رنگ‌آمیزی معمولی صفحهٔ شطرنج با سیاه و سفید را در نظر بگیرید. به‌سادگی می‌توان تحقیق کرد که «شتر» همواره از خانه‌ای به یک رنگ به خانه‌ای به همین رنگ می‌رود؛ به‌عبارت دیگر، رنگ خانه‌ای که «شتر» در آن قرار می‌گیرد ناورداست. بنابراین، پاسخ سؤال مسأله منفی است، زیرا رنگ هر دو خانهٔ مجاور متفاوت است.

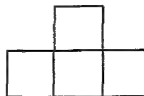
چند مسألهٔ دیگر می‌آوریم که در راه‌حل آنها از روش «رنگ کردن» استفاده می‌شود.

مسألهٔ ۱۳. الف) ثابت کنید نمی‌توان صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ را با پانزده چندمربعی ۴ × ۱ و یک چندمربعی که در شکل ۹۴ نشان داده شده است، بدون همپوشانی، پوشاند.



شکل ۹۴

ب) ثابت کنید صفحهٔ ۱۰ × ۱۰ را نمی‌توان با چندمربعیها مانند چندمربعی شکل ۹۵، بدون همپوشانی، پوشاند.



شکل ۹۵

ج) ثابت کنید صفحهٔ ۱۰۲ × ۱۰۲ را نمی‌توان با چندمربعیهای ۴ × ۱، بدون همپوشانی، پوشاند.

راهنمایی برای مسألهٔ ۱۳ ب). صفحهٔ موردنظر را مانند رنگ‌آمیزی معمول صفحهٔ شطرنج رنگ کنید.

مسألهٔ ۱۴. صفحه‌ای مستطیلی را با چندمربعیهای ۴×۱ و ۲×۲، بدون همپوشانی، پوشانده‌ایم. بعد چندمربعیها را از روی صفحه برداشته‌ایم و در این بین یکی از ۲×۲ ها گم‌شده است. به‌جای آن، یک چندمربعی ۴×۱ دیگر در اختیار داریم. ثابت کنید دیگر نمی‌توان صفحه را با این چندمربعیها، بدون همپوشانی، پوشاند.

مسألهٔ ۱۵. آیا اسب شطرنج می‌تواند از همهٔ خانه‌های صفحه‌ای $N \times ۴$ بگذرد، به‌طوری که به هر خانه دقیقاً یک‌بار برود و در آخر به خانهٔ اولیه بازگردد؟

راه‌حل مسألهٔ ۱۵ را بررسی می‌کنیم. خانه‌های صفحهٔ $N \times ۴$ را مطابق شکل ۹۶ با چهار رنگ، رنگ می‌کنیم. فرض کنید اسب بتواند چنین مسیری را طی کند. رنگ‌آمیزی نشان داده شده این ویژگی را دارد که اگر اسبی در خانه‌ای به رنگ ۱ (همین‌طور، به رنگ ۲) قرارگرفته باشد، در حرکت بعدی به خانه‌ای به رنگ ۳ (همین‌طور، به رنگ ۴) می‌رود.

	۲	۱	۲	۱	۲	۱
	۴	۳	۴	۳	۴	۳
	۳	۴	۳	۴	۳	۴
	۱	۲	۱	۲	۱	۲

شکل ۹۶

چون تعداد خانه‌های به رنگ ۱ و رنگ ۲ با تعداد خانه‌های به رنگ ۳ و رنگ ۴ برابر است، هنگام جابه‌جایی اسب، این جفتها یکی در میان ظاهر می‌شوند. بنابراین، هرگاه اسب در خانه‌ای به رنگ ۳ باشد، در حرکت بعدی به خانه‌ای به رنگ ۱ یا ۲ می‌رود، و معلوم است که فقط می‌تواند به خانه‌ای به رنگ ۱ برود. بنابراین رنگهای ۱ و ۳ یکی در میان ظاهر می‌شوند، که ممکن نیست، زیرا با این وضعیت اسب هیچ‌گاه به خانه‌های به رنگ ۲ و ۴ نمی‌رود. تناقض به‌دست آمده اثبات را کامل می‌کند.

توصیه به معلمان. ۱. با کمی فکر کردن می‌توان مسأله‌های «رنگ کردن» جدیدی طرح کرد. مثلاً، در مسألهٔ ۱۳ می‌توانیم انواعی از چندمربعیها و صفحه‌ها را بررسی کنیم. به یاد داشته باشید که معمولاً از روش رنگ کردن برای پاسخ منفی دادن استفاده می‌شود.

۲. دربارهٔ روش «رنگ کردن» کمی بیشتر می‌توان گفت: مسأله‌های ریاضی‌ای وجود دارند که می‌توان آنها را با استفاده از رنگ کردن حل کرد، اما نمی‌توان در آنها از ایدهٔ ناورداها استفاده کرد. علاوه بر این، برخی گونه‌های این روش را می‌توان به‌عنوان موضوعی جداگانه برای جلسه‌های محافل ریاضی در نظر گرفت.

۳. باقی‌مانده‌هایی که ناوردا هستند

در زیر، هفت مسأله آورده‌ایم که در راه‌حل آنها از ایدهٔ ناورداها استفاده می‌شود. نکتهٔ مهم این است که در راه‌حل آنها ناوردا باقی‌ماندهٔ به‌پیمانهٔ عددی طبیعی است. این وضعیت خیلی پیش می‌آید (مسأله‌های ۳، ۷-۹ را ببینید که مربوط به باقی‌مانده‌ها به‌پیمانهٔ ۲اند (یعنی زوجیت)، یا مسألهٔ ۱۱ که مربوط به باقی‌مانده‌ها به‌پیمانهٔ ۳ است).

مسألهٔ ۱۶. شاهزاده ایوان دو شمشیر جادویی دارد. با یکی از اینها می‌توان ۲۱ سر از سرهای اژدهای پلید را قطع کرد. با شمشیر دیگر می‌توان ۴ تا از سرها را قطع کرد، اما پس از آن اژدها ۱۹۸۵ سر جدید درمی‌آورد. اگر اژدها در آغاز ۱۰۰ سر داشته باشد، آیا شاهزاده ایوان می‌تواند همهٔ سرهایش را قطع کند؟ (**توجه.** اگر، مثلاً، اژدها سه سر داشته باشد با هیچ‌یک از شمشیرها نمی‌توان سرهای اژدها را قطع کرد.)

مسألهٔ ۱۷. در کشورهای دیلیا و دالیا واحد پول به ترتیب دیلر و دالر است. در دیلیا ۱ دیلر را با ۱۰ دالر عوض می‌کنند و در دالیا ۱ دالر را با ۱۰ دیلر. تاجری ۱ دیلر دارد و می‌تواند به هر دو کشور سفر کند و پولهایش را بدون اینکه هزینه‌ای بپردازد تبدیل کند. ثابت کنید او هرگز نمی‌تواند یک مقدار مساوی دیلر و دالر داشته باشد، مگر اینکه بخشی از پولش را خرج کند.

مسألهٔ ۱۸. دکتر گیزمو دستگاهی برای خرد کردن سکه‌ها ساخته است که می‌توان از آن در همهٔ کشورهای جهان استفاده کرد. نظام سکه‌زنی هر چه که باشد، این دستگاه هر سکه‌ای را که بگیرد، اگر ممکن باشد، دقیقاً پنج سکهٔ دیگر می‌دهد که کلاً همان مقدار می‌ارزند. ثابت کنید نظام سکه‌زنی در کشور هر چه که باشد، هرگز نمی‌توان با یک سکه کار را شروع کرد و در آخر ۲۶ سکه داشت.

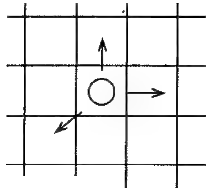
مسألهٔ ۱۹. سه دستگاه چاپ داریم. ماشین اول کارتی با عددهای a و b روی آن را قبول می‌کند و کارتی با عددهای $a+1$ و $b+1$ را تحویل می‌دهد. ماشین دوم فقط کارتی با دو عدد زوج a و b روی آن را قبول می‌کند و کارتی با عددهای $\frac{a}{2}$ و $\frac{b}{2}$ روی آن تحویل می‌دهد. ماشین سوم دو کارت به ترتیب با عددهای a و b، و b و c، روی آنها را قبول می‌کند و کارتی با عددهای a و c روی آن تحویل می‌دهد. هر سه این ماشینها کارتهایی را هم که به آنها داده‌ایم پس می‌دهند. اگر در ابتدا کارتی با عددهای ۵ و ۱۹ روی آن داشته باشیم، آیا می‌توانیم کارتی با عددهای ۱ و ۱۹۸۸ روی آن به‌دست بیاوریم؟

مسألهٔ ۲۰. عدد 8^n روی تخته‌سیاه نوشته شده است. مجموع رقمهای این عدد را حساب می‌کنیم، بعد مجموع رقمهای عدد حاصل را حساب می‌کنیم و همین‌طور ادامه می‌دهیم تا عددی یک رقمی به‌دست بیاوریم. اگر $n = 1989$، این رقم چیست؟

مسألهٔ ۲۱. سه نوع آمیب (A، B و C) در لولهٔ آزمایش وجود دارند. دو آمیب از دو نوع مختلف را می‌توان در هم ادغام کرد و یک آمیب از نوع سوم به‌دست آورد. پس از چند بار ادغام فقط یک آمیب

در لولهٔ آزمایش می‌ماند. اگر در ابتدا ۲۰ آمیب از نوع A، ۲۱ آمیب از نوع B و ۲۲ آمیب از نوع C وجود داشته باشد، نوع این آمیب چیست؟

مسألهٔ ۲۲. سرباز روی صفحهٔ شطرنجی $n \times n$ در هر حرکت می‌تواند یا یک خانه به سمت راست برود، یا یک خانه به سمت بالا یا روی قطری یک خانه به سمت پایین و چپ (شکل ۹۷ را ببینید). آیا این سرباز می‌تواند از همهٔ خانه‌های صفحه بگذرد، در هر یک از آنها دقیقاً یک بار قرار بگیرد و در آخر در خانهٔ سمت راست خانه‌ای که در ابتدا در آن بوده به سفرش خاتمه دهد؟



شکل ۹۷

روش حل مسألهٔ ۱۹ را شرح می‌دهیم.

توصیه به معلمان. کاملاً بجاست که راه‌حل را طوری حکایت کنید که در آن اینکه چگونه به آن دست یافته‌اید، چگونه به مقدار ناوردا پی برده‌اید، و چیزهایی از این دست، مشهود باشد.

در ظاهر چه چیزهایی داریم؟ ـ چند کار مجازیم بکنیم و می‌خواهیم ببینیم می‌توانیم شیء‌ای مشخص را از دیگری به‌دست آوریم یا خیر. با این وضعیت بی‌شک مجبوریم که ناوردایی پیدا کنیم. پس به دنبالش می‌گردیم.

در عمل اول (a, b) به $(a+۱, b+۱)$ نگاشته می‌شود. در این عمل چه چیز ناورداست؟ قطعاً، تفاضل عددهای روی کارتها، زیرا

$$(a+۱)-(b+۱)=a-b$$

اما در عمل دوم تفاضل تغییر می‌کند:

$$\frac{a}{۲}-\frac{b}{۲}=\frac{a-b}{۲}$$

یعنی تفاضل بر دو تقسیم شده است. در عمل سوم تفاضلها جمع می‌شوند:

$$a-c=(a-b)+(b-c)$$

با این توصیف به‌نظر می‌رسد که تفاضل عددهای روی کارتها ناوردایی که می‌خواهیم نیست. با این همه، به احتمال زیاد این تفاضل ربطی به این ناوردا (که هنوز نامعلوم است) دارد. پس چه چیزی است؟ دقت بیشتری می‌کنیم و سعی می‌کنیم چند کارت را از کارت داده شده به‌دست آوریم.

$$(۵, ۱۹) \to (۶, ۲۰)$$

$$(۶, ۲۰) \to (۳, ۱۰)$$

$$(۳, ۱۰) \to (۲۰, ۲۷)$$

$$(۶, ۲۰), (۲۰, ۲۷) \to (۶, ۲۷)$$

کافی است. اکنون می‌توانیم نتیجهٔ کارمان را ببینیم. کارتهای زیر را داریم:

$$(۵, ۱۹), (۶, ۲۰), (۳, ۱۰), (۲۰, ۲۷), (۶, ۲۷)$$

تفاضل عددهای روی کارتها برابر است با

$$۱۴, ۱۴, ۷, ۷, ۲۱$$

بالاخره فهمیدیم که باید چه چیزی را ثابت کنیم! معقول‌ترین حدس این است که تفاضل موردنظر همواره بر ۷ بخش‌پذیر است. این حکم را به‌سادگی می‌توان ثابت کرد. فقط کافی است که رفتار این تفاضل را تحت عملهای مجازگفته شده بررسی کنیم. این تفاضل یا اصلاً تغییر نمی‌کند، یا در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌شود یا دو تا از تفاضلها با هم جمع می‌شوند تا تفاضلی دیگر به‌دست آید. اما تفاضل موردنظر در مورد کارتی که می‌خواهیم به‌دست بیاوریم یعنی $(۱, ۱۹۸۸)$، برابر است با

$$۱ - ۱۹۸۸ = -۱۹۸۷$$

که بر ۷ بخش‌پذیر نیست. به این ترتیب راه‌حل کامل شده است و پاسخ منفی است.

* * *

مسأله‌های این مجموعه از بیشتر مسأله‌های ۱-۲۳ دشوارترند، اما تمرینهای خوبی برای کار در منزل و مطالعات بیشترند.

مسألهٔ ۲۳. خانه‌های جدولی $m \times n$ را با عددها طوری پر کرده‌ایم که مجموع عددهای هر سطر و مجموع عددهای هر ستون برابر با ۱ شده است. ثابت کنید $m = n$.

یادداشت. هرچند که ممکن است عجیب به نظر برسد، این مسأله از «ناوردا»هاست.

مسألهٔ ۲۴. ۷ لیوان روی میز وجود دارد و همگی وارونه‌اند. در هر حرکت می‌توانیم هر ۴ تا از آنها را که بخواهیم سروته کنیم. آیا می‌توانیم به‌وضعیتی برسیم که دهانهٔ همهٔ لیوانها درست رو به بالا قرار گرفته باشد؟

مسألهٔ ۲۵. هفت صفر و یک ۱ روی رأسهای مکعبی قرار گرفته‌اند. می‌توان به هر یک از عددهای دو سر هر یالی از این مکعب، یک را اضافه کرد. آیا می‌توان کاری کرد که همهٔ عددها برابر شوند؟ آیا می‌توان کاری کرد که همهٔ عددها بر ۳ بخش‌پذیر شوند؟

مسألهٔ ۲۶. دایره‌ای به شش قطاع تقسیم شده و شش عدد ۱، ۰، ۱، ۰، ۰ و ۰ در این قطاعها به ترتیب ساعتگرد نوشته شده‌اند (هر عدد در یک قطاع نوشته شده است). می‌توان با عددهای هر دو قطاع مجاور یک را جمع کرد. آیا می‌توان کاری کرد که همهٔ عددها برابر شوند؟

مسألهٔ ۲۷. در وضعیت مسألهٔ ۲۰، مشخص کنید که کدام کارتها را می‌توان از کارت $(5, 19)$ به‌دست آورد و کدام کارتها را نمی‌توان.

مسألهٔ ۲۸. کپه‌ای از ۱۰۰۱ خرده‌سنگ روی میز وجود دارد. می‌توانید کارهای زیر را انجام دهید: یکی از کپه‌ها را که بیش از یک خرده‌سنگ دارد انتخاب می‌کنید، یکی از خرده‌سنگها را دور می‌اندازید و این کپه را به دو کپهٔ کوچکتر (که لزومی ندارد برابر باشند) تقسیم می‌کنید. آیا می‌توان به وضعیتی رسید که همهٔ کپه‌های روی میز ۳ خرده‌سنگ داشته باشند؟

مسألهٔ ۲۹. عددهای ۱، ۲، ۳، ... و n در یک ردیف نوشته شده‌اند. می‌توانیم جای هر دو عدد مجاور را که بخواهیم عوض کنیم. اگر ۱۹۸۹ بار این کار را تکرار کنیم، آیا ممکن است ترتیب نهایی عددها بر ترتیب اولیهٔ آنها منطبق باشد؟

مسألهٔ ۳۰. یک سه‌تایی از عددها داده شده است. می‌توان کارهای زیر را روی عددهای این سه‌تایی انجام داد: دو تا از آنها، مثلاً a و b را با $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ و $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$ عوض می‌کنیم. آیا می‌توان با استفاده از این کارها سه‌تایی $(1, \sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ را از سه‌تایی $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ به‌دست آورد؟

توصیه به معلمان. ۱. مسأله‌های «ناورداها» خیلی متداول‌اند؛ مثلاً، در هر المپیاد ریاضی شهر سنت‌پترزبورگ دست‌کم دو یا سه مسأله را می‌توان با ایدهٔ ناورداها حل کرد.

۲. استفاده از ایدهٔ ناورداها بسیار رایج است و شاخه‌های مختلفی از علوم را در بر گرفته است. اگر دانش‌آموزانتان با مقدمات فیزیک آشنا هستند، مثلاً می‌توانید برخی نتیجه‌های قانون بقای انرژی یا قضیهٔ گشتاور ماند یا چیزهایی مانند اینها را بررسی کنید.

۳. دانش‌آموزان باید متوجه باشند که اگر مقدار ناوردایی (یا حتی ناوردایی) برای دو شیء مفروض برابر باشد، دلیل نمی‌شود که بتوان یکی از آنها را با کارهای مشخص شده از دیگری به‌دست آورد. این مورد از خطاهای رایجی است که پس از نخستین برخورد با ناورداها بروز می‌کند. مثالهایی ساده برای دانش‌آموزانتان بزنید تا متوجه این خطا بشوند.

۴. یک بار دیگر ساده‌ترین و متداول‌ترین ناورداها را یادآوری می‌کنیم:

الف) باقی‌مانده به‌پیمانهٔ عددی طبیعی ـ مسأله‌های ۳، ۷–۱۱، ۱۷–۲۲.

ب) انتخاب بخشی از یک شیء ـ مسأله‌های ۷، ۹ و ۱۲.

ج) رنگ کردن ـ مسأله‌های ۱۳–۱۶.

د) برخی عبارتهای جبریِ شامل متغیرهای داده شده ـ مسأله‌های ۴، ۲۶ و ۳۰.

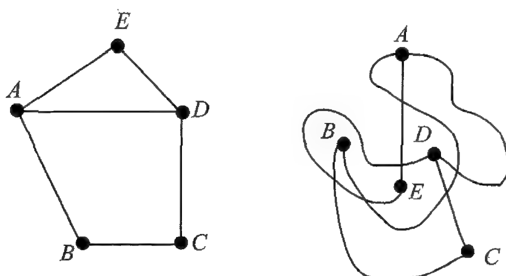
فصل ۱۳

گرافها ـ ۲

در این فصل مطالعهٔ گرافها را که در بخش اول این کتاب شروع کردیم پی می‌گیریم. چرا یک بار دیگر به این موضوع پرداخته‌ایم؟ اول اینکه مطالعهٔ گرافها موضوعی جالب و سودمند است. نکته دوم، و مهمتر، این است که استدلالهای مقدماتی دربارهٔ گرافها ما را به ریاضیات جدی‌تر نزدیکتر می‌کند (این مورد بیشتر در قسمت ۱ و قسمت ۳ این فصل پیش می‌آید).

۱. یکریختی

همان‌طور که قبلاً هم اشاره کردیم، هر گراف را به چندین طریق می‌توان رسم کرد. مثلاً، نقشهٔ راههای هوایی را می‌توان به شکلهایی رسم کرد که حتی شبیه یکدیگر هم نباشند. مثال زیر را در نظر بگیرید: در تورنمنتی که تیمهای A، B، C، D و E در آن شرکت کرده‌اند، تیم A با تیمهای B، D و E بازی کرده است. علاوه بر این، تیم C با تیمهای B و D بازی کرده است و D هم با E بازی کرده است. معلوم است که هر دو نمودار شکل ۹۸ این وضعیت را نشان می‌دهند.

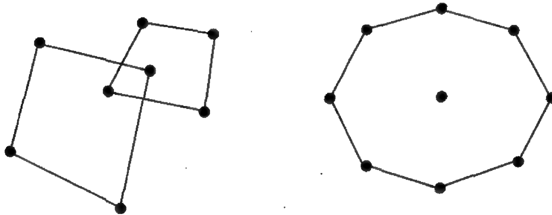


شکل ۹۸

اکنون تعریف دقیق را ذکر می‌کنیم.

تعریف. دوگراف را یکریخت می‌نامند، هرگاه تعداد رأسهایشان برابر باشد (مثلاً برابر با n) و بتوان رأسهای هر یک ازگرافها را با عددهای از ۱ تا n طوری شماره‌گذاری کرد که دو رأس درگراف اول وقتی و فقط وقتی با یالی به هم وصل شده باشند که دو رأس با همان شماره‌ها درگراف دوم با یالی به هم وصل شده باشند.

اکنون می‌توانیم دِینمان را ادا کنیم و ثابت کنیم که گرافهایی که در شکل ۹۹ نشان داده شده‌اند (و عیناً ازگرافهای فصل «گرافها ـ ۱» کپی شده‌اند) یکریخت نیستند.



شکل ۹۹

نکته این است که تعداد مؤلفه‌های همبندی این گرافها با هم فرق دارد: گراف اول سه‌تا دارد و دومی دوتا.

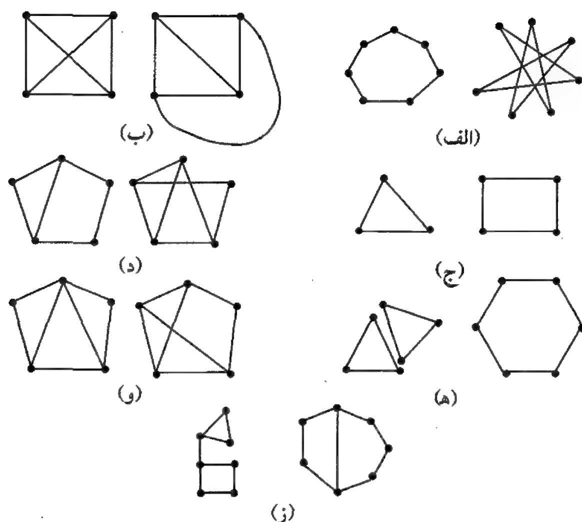
اکنون ثابت می‌کنیم که تعداد مؤلفه‌های همبندی گرافهای یکریخت برابر است. کافی است دقت کنید که اگر دو رأس ازگراف اول متعلق به یک مؤلفهٔ همبندی باشند، با مسیری به هم متصل‌اند، در نتیجه رأسهای نظیرشان درگراف دوم هم با مسیری به هم متصل‌اند، پس در یک مؤلفهٔ همبندی قرار دارند.

مسألهٔ ۱. آیا هر جفت ازگرافهایی که در شکل ۱۰۰ نشان داده شده‌اند یکریخت‌اند؟

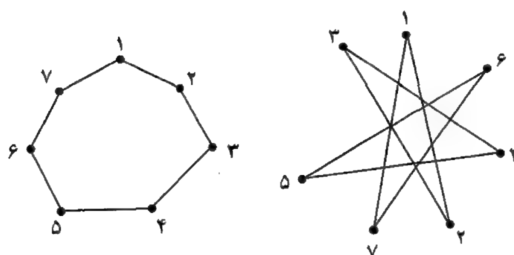
راه‌حل. از شکلهای ۱۰۱ و ۱۰۲ معلوم است که جفت گرافهای (الف) و (ب) یکریخت‌اند. گرافهای بقیهٔ جفتها یکریخت نیستند.

راهنمایی: (ج) تعداد رأسها برابر نیست. (د) تعداد یالها برابر نیست. (ه) تعداد مؤلفه‌های همبندی برابر نیست. (و) گراف اول رأسی دارد که چهار یال از آن خارج شده است، اما درگراف دوم چنین رأسی وجود ندارد. (ز) درگراف اول یالی وجود دارد که پس از حذف آن گراف به دو مؤلفهٔ همبندی تقسیم می‌شود. اما گراف دوم چنین یالی ندارد. یکریخت نبودن این دو گراف را به طریقی دیگر هم می‌توان ثابت کرد: مسیرهای بسته‌ای را درنظر می‌گیریم که از هیچ رأسی دو بار نمی‌گذرند. گراف اول دو تا از این مسیرها دارد، یکی به طول* ۳ و یکی به طول ۴. گراف دوم سه تا از این مسیرها دارد، طول این مسیرها ۴، ۵ و ۷ است.

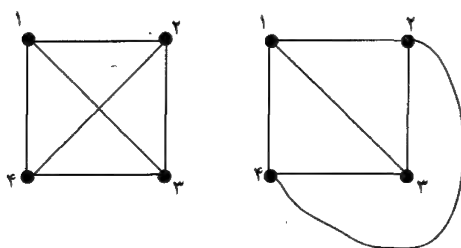
* طول مسیر، تعداد یالهایی است که آن را تشکیل داده‌اند.



شکل ۱۰۰



شکل ۱۰۱



شکل ۱۰۲

توصیه به معلمان. اگر گرافها «یکسان» باشند، دانش‌آموزان این موضوع را از نظر شهودی خیلی خوب تشخیص می‌دهند. بنابراین خیلی جالب است که به صحبتهای تک‌تک آنها ضمن تلاششان برای دست یافتن به تعریف دقیق یکریختی گوش کنید. گاهی این تعریفها چیزی شبیه به این‌اند که «دو گراف

یکریخت (یکسان)اند، هرگاه تعداد رأسها و یالهایشان برابر باشد». یافتن راه‌حلهای قسمتهای مختلف مسألهٔ ۱ هم منجر به بحثهای جالبی دربارهٔ معیارهای مختلف برای یکریخت نبودن می‌شود.

به یکی از مفهومها به‌طور اتفاقی ضمن راه‌حل مسألهٔ ۱ اشاره شده است. در اینجا تعریف دقیق آن را می‌آوریم.

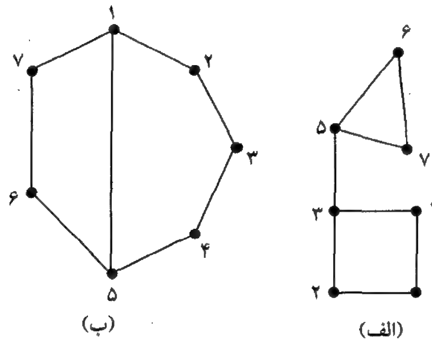
تعریف. دور مسیری بسته در گراف است که از هیچ رأسی دو بار نمی‌گذرد.

ضمن بحث در مورد قسمت (ز) متذکر شدیم که گراف شکل ۱۰۳ (الف) دوتا دور دارد:

$$۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۱, \qquad ۵ - ۶ - ۷ - ۵$$

و در عین حال، گراف شکل ۱۰۳ (ب) سه‌تا دور دارد:

$$۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۶ - ۷ - ۱ \qquad ۱ - ۲ - ۳ - ۴ - ۵ - ۱, \qquad ۱ - ۵ - ۶ - ۷ - ۱,$$



شکل ۱۰۳

در اینجا چهار مسألهٔ دیگر دربارهٔ این مفهومها و تعریفها آورده‌ایم.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید گرافی پنج رأسی وجود ندارد که درجهٔ رأسهایش ۴، ۴، ۴، ۴ و ۲ باشد.

مسألهٔ ۳. ثابت کنید گرافی $2n$ رأسی وجود دارد که درجهٔ رأسهایش ۱، ۱، ۲، ۲، . . . ، n و n است.

مسألهٔ ۴. آیا درست است که دو گرافی که

الف) هر دو ۱۰ رأس دارند و درجهٔ هر رأسشان برابر با ۹ است،

ب) هر دو ۸ رأس دارند و درجهٔ هر رأسشان برابر با ۳ است،

ج) هر دو همبندند، دور ندارند و ۶ یال دارند،

باید یکریخت باشند؟

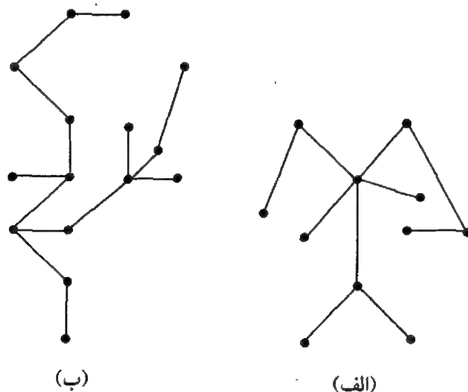
مسألهٔ ۵. در گرافی همبند درجهٔ چهار تا از رأسها برابر با ۳ است و درجهٔ بقیهٔ رأسها برابر با ۴ است. ثابت کنید نمی‌توانیم یالی را حذف کنیم تا این گراف به دو مؤلفهٔ همبندی یکریخت تجزیه شود.

۲. درختها

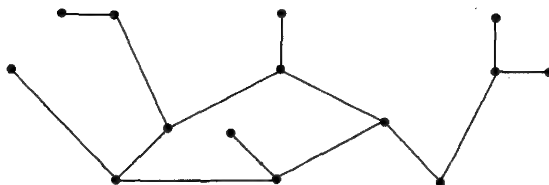
در این بخش نوعی ازگرافها را بررسی می‌کنیم که هر چند کاملاً ساده به نظر می‌رسند، اما بخشی مهم از نظریهٔ گرافها هستند.

تعریف. درخت گرافی همبند و بدون دور است.

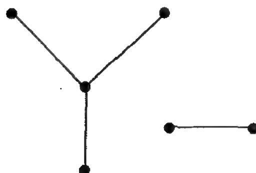
مثلاً، گرافهای شکل ۱۰۴ درخت‌اند، اما گرافهای شکلهای ۱۰۵ و ۱۰۶ درخت نیستند.



شکل ۱۰۴



شکل ۱۰۵



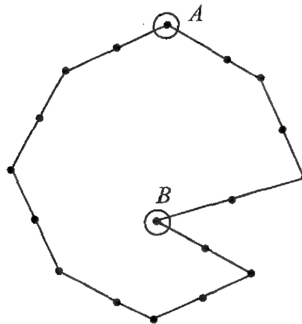
شکل ۱۰۶

وجه تسمیهٔ نامگذاری این نوع گرافها این است که برخی از آنها واقعاً شکل درختان را تداعی می‌کنند (شکل ۱۰۴ (ب) را ببینید).

برای مطالعهٔ ویژگیهای درختها، استفاده از مفهوم مسیر ساده کاملاً مفید است. قبلاً مفهوم مسیر را در فصل «گرافها ـ ۱» تعریف کرده‌ایم. مسیری را «ساده» می‌نامیم که هیچ‌یک از یالهایش را بیشتر از یک بار در بر نداشته باشد.

مسألهٔ ۶. ثابت کنید گرافی که هر دو رأسش با یک و فقط یک مسیر ساده به‌هم وصل شده‌اند درخت است.

راه‌حل. واضح است که چنین گرافی همبند است. فرض می‌کنیم که این گراف دور داشته باشد. در این صورت هر دو رأس این دور با دست‌کم دو مسیر ساده به هم متصل‌اند (شکل ۱۰۷ را ببینید). رسیدن به این تناقض نشان می‌دهد که فرضمان غلط بوده است.



شکل ۱۰۷

اکنون حکم برعکس را ثابت می‌کنیم.

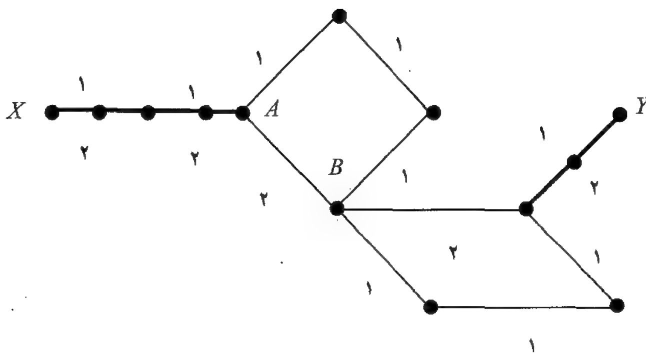
مسألهٔ ۷. ثابت کنید که در هر درخت هر دو رأس با یک و فقط یک مسیر ساده به هم متصل‌اند.

راه‌حل. فرض کنید چنین نباشد و دو رأس X و Y با دو مسیر سادهٔ مختلف به هم متصل باشند. در ابتدا به‌نظر می‌رسد که اگر روی مسیر اول از X به Y برویم و سپس روی مسیر دوم برگردیم، یک دور به‌دست می‌آوریم. متأسفانه، ممکن است این مطلب درست نباشد. مشکل اینجاست که ممکن است این مسیرها رأسهای مشترک (بجز دو سر مشترکشان) داشته باشند (شکل ۱۰۸ را ببینید)، و بنابر تعریف، رأسهای هر دور نباید تکراری باشند. برای اینکه از این دور «نامناسب» دوری واقعی در بیاوریم، باید

الف) از X شروع به حرکت کنیم و اولین رأسی را انتخاب کنیم که در آن مسیرهایمان منشعب می‌شوند (در شکل ۱۰۸، این رأس نقطهٔ A است)،

ب) بعد از اینکه این رأس را انتخاب کردیم، باید روی مسیر شمارهٔ ۱ اولین نقطه‌ای را پیدا کنیم که به مسیر شمارهٔ ۲ هم تعلق دارد (رأس B در شکل ۱۰۸).

اکنون بخشهایی از مسیرها که میان A و B قرار دارند دور تشکیل می‌دهند.



شکل ۱۰۸

توصیه به معلمان. دو جملهٔ اول این راه‌حل ایده‌های اساسی راه‌حل را در بر دارند. مطالب تکنیکی دیگر ممکن است برای برخی دانش‌آموزان دشوار باشد.

با استفاده از مسأله‌های ۶ و ۷ می‌توان درخت را جور دیگری تعریف کرد که معادل تعریف اول است.

تعریف. درخت گرافی است که در آن هر دو رأس مختلف با یک و فقط یک مسیر ساده به هم متصل‌اند.

برای حل کردن مسأله‌های زیر از هر یک از این تعریفها که بخواهیم استفاده می‌کنیم.

مسألهٔ ۸. ثابت کنید در هر درخت که دست‌کم یک یال دارد، رأسی وجود دارد که انتهای فقط یک یال است (چنین رأسی را آویز می‌نامند).

راه‌حل. رأسی دلخواه از درخت را درنظر بگیرید و از روی یکی از یالهایی که از این رأس خارج شده است به رأسی دیگر بروید. اگر درجهٔ این رأس جدید ۱ باشد، در آن می‌مانیم؛ در غیر این صورت، از روی یالی دیگر به رأسی دیگر می‌رویم و این کار را ادامه می‌دهیم. معلوم است که نمی‌توانیم به رأسی که قبلاً رفته‌ایم برسیم ـ اگر چنین شود، یعنی دور وجود دارد. از طرف دیگر، چون تعداد رأسهای گرافمان متناهی است، جایی باید متوقف شویم. رأسی که در آن متوقف شویم آویز است!

حکم مسألهٔ ۸ را لم رأسِ آویز می‌نامند. بعداً از این لم در راه‌حلهای دیگر استفاده می‌کنیم.

توصیه به معلمان. از اینجا به بعد مسأله‌هایمان را به زبان نظریهٔ گراف یا به زبان خودمانی بیان می‌کنیم. تجربهٔ ما نشان می‌دهد که نباید در استفاده از این دو گونه افراط کرد. اول اینکه دانش‌آموزان باید زبان نظریهٔ گراف را بفهمند. دوم اینکه دانش‌آموزان باید یاد بگیرند که معنی واقعی مسأله را که ورای بیان خودمانی آن نهفته است درک کنند. بنابراین، بهتر است که از هر دو زبان، بی‌آنکه ذهنمان را مشغول یکی از آنها بکنیم، بی‌هیچ محدودیتی استفاده کنیم.

مسألهٔ ۹. درجهٔ همهٔ رأسهای گرافی برابر با ۳ است. ثابت کنید این گراف دور دارد.

مسألهٔ ۱۰. ثابت کنید اگر یالی را (به استثنای دو سرش) از درختی حذف کنیم، گراف حاصل همبند نیست.

مسألهٔ ۱۱. ناکجاآباد ۱۰۱ شهر دارد. برخی از این شهرها با جاده به هم وصل‌اند و هر دو شهر با یک و فقط یک مسیر ساده به هم وصل‌اند. ناکجاآباد چند جاده دارد؟

راه‌حل. اگر مسأله را به زبان نظریهٔ گراف ترجمه کنیم می‌توانیم بگوییم که گراف جاده‌های ناکجاآباد درخت است. این درخت باید رأسی آویز داشته باشد. این رأس و یال متناظرش را حذف کنید. گراف حاصل هم درخت است و در نتیجه رأسی آویز دارد، که آن را همراه با یال متناظرش حذف می‌کنیم. اگر این کار را ۱۰۰ بار تکرار کنیم سرانجام به درختی می‌رسیم که یک رأس دارد و البته یالی ندارد. چون در هر مرحله یک یال را حذف کرده‌ایم، نتیجه می‌گیریم که ۱۰۰ یال وجود داشته است.

دقیقاً به همین روش می‌توانیم حکمی دیگر و کلی‌تر را ثابت کنیم.

قضیه: در هر درخت، تعداد رأسها از تعداد یالها یکی بیشتر است.

قضیهٔ عکس هم درست است.

مسألهٔ ۱۲. ثابت کنید گراف همبندی که تعداد رأسهایش از تعداد یالهایش یکی بیشتر است درخت است.

* * *

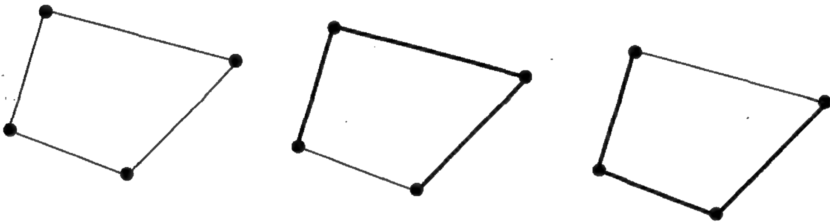
مسألهٔ ۱۳. تور والیبالی مستطیلی مشبکه‌ای به ابعاد ۶۰۰ × ۵۰ است. حداکثر چند تا از ریسمانهای به‌طول واحد را می‌توانید ببرید، به‌طوری که این تور تکه نشود؟

راه‌حل. این تور والیبال را گرافی درنظر می‌گیریم که گره‌هایش رأسهای گراف و ریسمانهایش یالهای گراف‌اند. هدفمان این است که تا جایی که می‌توانیم یال از این گراف حذف کنیم، به‌طوری که همبند بماند. تا می‌توانیم یالها را یکی‌یکی حذف می‌کنیم. توجه کنید که اگر گراف دور داشته باشد می‌توانیم همهٔ یالهای این دور را حذف کنیم. اما گراف همبند بدون دور درخت است ـ بنابراین، وقتی که درختی به‌دست آوردیم، دیگر نمی‌توانیم یال دیگری از گراف را حذف کنیم!

تعداد یالهای گراف موردنظر را در این لحظهٔ پایانی حساب می‌کنیم. تعداد رأسها همان است که اول بوده ـ یعنی برابر است با ۶۰۱ × ۵۱ یا ۳۰۶۵۱. از طرف دیگر، درختی با این تعداد رأس باید ۱ − ۳۰۶۵۱ یا ۳۰۶۵۰ یال داشته باشد. در ابتدا ۵۱ × ۶۰۰ + ۵۰ × ۶۰۱ یا ۶۰۶۵۰ یال داریم. بنابراین حداکثر می‌توانیم ۳۰۰۰۰ یال را حذف کنیم ـ و به‌سادگی می‌توان قانع شد که واقعاً می‌توان این کار را کرد.

یادداشت. توجه‌تان را به ایدهٔ اصلی این راه‌حل ـ یعنی یافتن درخت «ماکسیمال» در گراف موردنظر ـ

جلب می‌کنیم. بی‌تردید، این درخت «ماکسیمال» یکتا نیست (شکل ۱۰۹ را ببینید). این روش (یعنی انتخاب درخت «ماکسیمال») به حل سه مسألهٔ زیر هم کمک می‌کند.



شکل ۱۰۹

مسألهٔ ۱۴. کشوری ۳۰ شهر دارد. هر یک از این شهرها به هر یک از دیگر شهرها از طریق (فقط) یک جاده متصل است. حداکثر چند جاده را می‌توان مسدود کرد، به‌طوری که باز هم بتوان از هر شهر به بقیهٔ شهرها رفت؟

مسألهٔ ۱۵. ثابت کنید در هر گراف همبند می‌توان رأسی را همراه با همهٔ یالهایی که از آن خارج شده‌اند حذف کرد، به‌طوری که گراف همبند بماند.

مسألهٔ ۱۶ *. کشوری ۱۰۰ شهر دارد که برخی از آنها از طریق خط هوایی به هم متصل‌اند. می‌دانیم که می‌توان از هر شهر به بقیهٔ شهرها دسترسی داشت (هر چند که ممکن است چند جا میان راه توقف کرد). ثابت کنید می‌توان حداکثر

الف) ۱۹۸ بار

ب) ۱۹۶ بار

پرواز کرد و از همهٔ شهرها دیدن کرد.

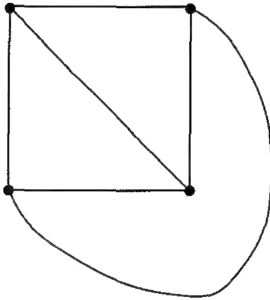
توصیه به معلمان. می‌توان جلسه‌ای جداگانه را به مفهوم درخت و مسأله‌های مربوط به آن اختصاص داد. می‌توان مسأله‌های مربوط به ایدهٔ درخت ماکسیمال را پس از بحث مفصل دربارهٔ این ایده یکی‌یکی مطرح کرد.

۳. قضیهٔ اویلر

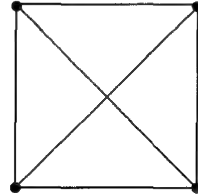
در این بخش قضیه‌ای کلاسیک را که هم‌نام لئونارد اویلر، ریاضیدان بزرگ قرن هجدهم، است ثابت می‌کنیم. در این خصوص، ویژگیهای نوع مهمی از گرافها را هم، که تعریف آنها در سطر بعد آمده، بررسی می‌کنیم.

تعریف. گرافی را که می‌توان آن را طوری کشید که یالهایش یکدیگر را (بجز در انتهایشان) قطع نکنند مسطح می‌نامند.

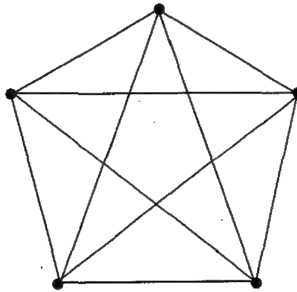
مثلاً، گراف شکل ۱۱۰ مسطح است (گرافی یکریخت با آن در شکل ۱۱۱ رسم شده است)، اما گراف شکل ۱۱۲ مسطح نیست (این مطلب را کمی بعد ثابت می‌کنیم).



شکل ۱۱۱



شکل ۱۱۰



شکل ۱۱۲

می‌گوییم گرافی مسطح درست رسم شده است، هرگاه یالهایش (که در شکل رسم شده‌اند) در نقطه‌های درونی‌شان یکدیگر را قطع نکرده باشند.

توصیه به معلمان. شاید متوجه شده‌اید که در استفاده از مفهوم گراف خیلی دقیق نبوده‌ایم ـ زیرا میان دو گراف مختلف، اما یکریخت، فرقی قائل نشده‌ایم. این بی‌دقتی را به‌ویژه می‌توان به‌روشنی در تعریف گراف مسطح دید. مهم است که دانش‌آموز بفهمد که ممکن است گرافی مسطح باشد، هر چند که یالهایش در شکل کشیده شده از آن یکدیگر را قطع کرده باشند (شکل ۱۱۰ را ببینید).

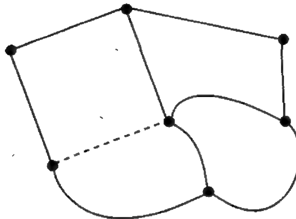
اگر گرافی درست رسم شده باشد، صفحه را به چند ناحیه که وجه نامیده می‌شوند تقسیم می‌کند. تعداد وجه‌ها را با F، تعداد رأسها را با V و تعداد یالهای گراف را با E نشان می‌دهیم. در مورد گراف

شکل ۱۱۱، ۴ $V =$، ۶ $E =$ و ۴ $F =$ (ناحیهٔ بی‌کران بیرونی گراف را هم وجه به حساب می‌آوریم).

در این صورت قضیهٔ زیر درست است.

قضیهٔ اویلر. در هر گراف همبند مسطح درست رسم شده تساوی ۲ $V - E + F =$ درست است.

اثبات. یک بار دیگر نحوهٔ استدلالی را که از آن در راه‌حل مسألهٔ مربوط به تور والیبال استفاده کردیم تکرار می‌کنیم: یالها را حذف می‌کنیم تا به درخت برسیم و همبندی گراف حفظ شود. به نحوهٔ تغییرات مقدارهای V، E و F بر اثر این کار توجه کنید. واضح است که تعداد رأسها تغییر نمی‌کند، اما تعداد یالها یکی کم می‌شود. تعداد وجه‌ها هم یکی کم می‌شود: در شکل ۱۱۳ نشان داده شده است که چگونه دو وجه مجاور به یال حذف شده در هم ادغام می‌شوند تا یک وجه جدید پدید بیاید. بنابراین مقدار $V - E + F$ بر اثر این کار تغییر نمی‌کند (می‌توانیم بگوییم که مقدار $V - E + F$ بر اثر این کار ناورداست ـ فصل «ناورداها» را ببینید!).



شکل ۱۱۳

چون (بنابر قضیهٔ بخش قبل) در درخت حاصل ۱ $V - E =$ و ۱ $F =$، در این درخت ۲ $V - E + F =$، و در نتیجه این تساوی در مورد گراف اصلی هم درست است.

تساوی ۲ $V - E + F =$ را دستور اویلر می‌نامند.

قضیهٔ اویلر حکمی بسیار قوی است و می‌توانیم نتیجه‌های زیبا و جالب زیادی را از آن به‌دست آوریم.

مسألهٔ ۱۷. در سرزمین دریاچه‌ها ۷ دریاچه وجود دارد. این دریاچه‌ها از طریق ۱۰ نهر به هم مرتبط‌اند، به‌طوری که می‌توان از طریق این نهرها از هر دریاچه به بقیهٔ دریاچه‌ها شنا کرد. سرزمین دریاچه‌ها چند جزیره دارد؟

مسألهٔ بعدی دشوارتر است.

مسألهٔ ۱۸. ۲۰ نقطه درون مربعی قرار دارند. این نقطه‌ها را با استفاده از پاره‌خطهایی غیرمتقاطع به یکدیگر و رأسهای مربع وصل کرده‌ایم، به‌طوری که مربع به چند مثلث افراز شده است. تعداد این مثلثها چندتاست؟

راه‌حل. نقطه‌ها و رأسهای مربع را رأسها و پاره‌خطها و ضلعهای مربع را یالهای گرافی مسطح درنظر می‌گیریم. تعداد یالهای دور هر ناحیه را (که گراف، صفحه را به آنها تقسیم کرده است) می‌شماریم. سپس همهٔ این عددها را جمع می‌کنیم. چون هر یال دقیقاً دو وجه مختلف را از هم جدا می‌کند، عدد حاصل دقیقاً دو برابر تعداد یالهاست. چون بجز ناحیهٔ بیرونی، که به چهار یال محدود شده بقیهٔ وجه‌ها مثلث‌اند، پس

$$۳(F-۱)+۴=۲E$$

یعنی،

$$E=\frac{۳(F-۱)}{۲}+۲$$

چون تعداد رأسها برابر با ۲۴ است، بنابر دستور اویلر،

$$۲۴-\left(\frac{۳(F-۱)}{۲}+۲\right)+F=۲$$

بنابراین $F=۴۳$ (که در اینجا وجه بیرونی را هم شمرده‌ایم). بنابراین تعداد مثلثهایی که مربع به آنها تقسیم شده برابر با ۴۲ است.

مسألهٔ ۱۹. ثابت کنید در هر گراف مسطح، $۲E \geqslant ۳F$.

بحث را با چند نتیجهٔ کلاسیک قضیهٔ اویلر پی می‌گیریم. ابتدا یک نابرابری به‌دست می‌آوریم.

مسألهٔ ۲۰. ثابت کنید در هر گراف همبند مسطح، $E \leqslant ۳V-۶$.

راه‌حل. از مسألهٔ قبل نتیجه می‌شود $۲E \geqslant ۳F$. در نتیجه، بنابر دستور اویلر،

$$V-E+\frac{۲E}{۳} \geqslant ۲$$

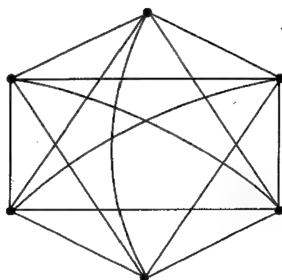
بنابراین، $E \leqslant ۳V-۶$، همان چیزی که می‌خواهیم.

مسألهٔ ۲۱. ثابت کنید در هر گراف مسطح (حتی اگر همبند نباشد)، $E \leqslant ۳V-۶$.
راهنمایی: نابرابری موردنظر نتیجهٔ نابرابریهای متناظر برای هر یک از مؤلفه‌های همبندی است.

جالب اینجاست که به کمک نابرابری آخری می‌توانیم حکمی را که در ابتدای این بخش ادعا کردیم ثابت کنیم.

مسألهٔ ۲۲. گرافی پنج رأسی که هر یک از رأسهایش با یالی به بقیهٔ رأسها متصل است مسطح نیست.
راهنمایی: ثابت کنید در مورد این گراف نابرابری $E \leqslant ۳V - ۶$ درست نیست.

گرافی را که در آن هر رأس با یالی به بقیهٔ رأسها متصل است گراف کامل می‌نامند. در شکل ۱۱۴ گراف کامل ۶ رأسی را می‌بینید.



شکل ۱۱۴

حکم مسألهٔ ۲۲ یعنی اینکه گراف کاملی که بیش از ۴ رأس دارد مسطح نیست.

مسألهٔ ۲۳. آیا می‌توان سه خانه و سه چاه ساخت و بعد همهٔ خانه‌ها را از طریق نه مسیر به چاهها طوری وصل کرد که مسیرها بجز در دو سرشان جای دیگری یکدیگر را قطع نکنند؟
راهنمایی: درگراف مربوط به این مسأله می‌توان نابرابری $۳F \leqslant ۲E$ را قویترکرد. در حقیقت، طول هر دور در این گراف باید عددی زوج باشد، زیرا خانه‌ها و چاهها در این دور یکی در میان ظاهر می‌شوند. اگر این گراف مسطح و درست رسم شده باشد، نتیجه می‌گیریم که هر وجه این نمایش (از قرار معلوم) مسطح دست‌کم باید ۴ یال در مرزهایش داشته باشد. بنابراین از محاسباتی شبیه به محاسبات راه‌حل مسألهٔ ۱۹ نابرابری $۲F \leqslant E$ به‌دست می‌آید. اما این نابرابری درست نیست، و در نتیجه پاسخ سؤال مسأله خیر است.

مسألهٔ ۲۴. ثابت کنید اگر درجهٔ هر یک از ۱۰ رأس گرافی برابر با ۵ باشد، این گراف مسطح نیست.

می‌توان از نابرابری $E \leqslant ۳V - ۶$ برای اثبات سه حکم زیبای زیر استفاده کرد.

مسألهٔ ۲۵. ثابت کنید در هر گراف مسطح رأسی وجود دارد که درجه‌اش از ۵ بیشتر نیست.

مسألهٔ ۲۶. هر یال گرافی کامل و ۱۱ رأسی را با قرمز یا آبی رنگ می‌کنیم. سپس گرافی را که از همهٔ یالهای قرمز تشکیل شده و گرافی را که از همهٔ یالهای آبی تشکیل شده درنظر می‌گیریم. ثابت کنید دست‌کم یکی از این دوگراف مسطح نیست.

مسألهٔ ۲۷*. هفت ضلعی‌ای را به پنج‌ضلعیها و شش‌ضلعیهای محدب طوری تقسیم کرده‌ایم که هر یک از رأسهایش به دست‌کم دو تا از چندضلعیهای کوچکتر تعلق دارد. ثابت کنید که تعداد چندضلعیها در این فرش کردن از ۱۳ کمتر نیست.

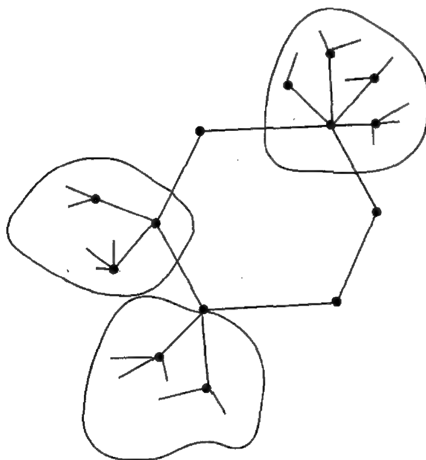
توصیه به معلمان. تجربهٔ ما نشان می‌دهد که مطالبی که در این بخش مطرح شدند در نظریهٔ گراف کاملاً مهم‌اند. احتمالاً می‌توان جلسه‌ای جداگانه را برای پرداختن به این موضوع اختصاص داد.

۴. مسأله‌های گوناگون

در این بخش مسأله‌هایی را از بخشهای مختلف نظریهٔ گراف جمع‌آوری کرده‌ایم. برای حل کردن این مسأله‌ها باید روشهای مطرح شده در این فصل و فصل «گرافها ـ ۱» را با ایده‌های بکر دیگری ادغام کرد. درنتیجه، این مسأله‌ها بسیار دشوارند.

مسألهٔ ۲۸. ثابت کنید که می‌توان هر گراف همبند را که بیش از دو رأس «فرد» (فصل «گرافها ـ ۱» را ببینید) ندارد بدون برداشتن قلم ازکاغذ طوری رسم کرد که هر یال دقیقاً یک بار رسم شود.

خلاصهٔ راه‌حل. فرض کنید که گراف موردنظر هیچ رأس «فرد»ی نداشته باشد. حکم را به استقرا روی تعداد یالها ثابت می‌کنیم. پایهٔ استقرا (گرافی بدون یال) معلوم است. برای اثبات گام استقرایی، گراف همبند دلخواهی درنظر می‌گیریم که همهٔ رأسهایش «زوج»اند. چون این گراف اصلاً رأس آویز ندارد، پس درخت نیست و در نتیجه باید دور داشته باشد. اکنون می‌توانیم به‌طور موقت همهٔ یالهای این دور را حذف کنیم. پس از این کار، گراف موردنظر به چند مؤلفهٔ همبندی تجزیه می‌شود که با دور «موقتاً حذف شده» رأسهایی مشترک دارند و در شرایط قضیه صدق می‌کنند (شکل ۱۱۵ را ببینید). بنابر



شکل ۱۱۵

فرض استقرا هر یک از این مؤلفه‌ها را می‌توان به طریق خواسته شده رسم کرد. اکنون معلوم است که گراف اصلی را چگونه باید رسم کرد: روی دور گفته شده حرکت می‌کنیم و اگر به رأسی رسیدیم که به یکی از مؤلفه‌های همبندی تعلق دارد، رسم این مؤلفه را از این رأس شروع می‌کنیم (و مسلماً مهم است که کار را در همین رأس تمام کنیم!)، بعد حرکت روی دور را ادامه می‌دهیم.

اثبات حالتی که گرافمان دو رأس با درجهٔ فرد دارد کاملاً مشابه است ـ مسیری که این دو رأس را به هم وصل می‌کند موقتاً حذف می‌کنیم و از همان روش استفاده می‌کنیم.

گرافی را که می‌توان آن را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ طوری رسم کرد که هر یالش دقیقاً یک بار کشیده شود، گراف اویلری می‌نامند.

قبلاً در فصل «گرافها ـ ۱» ثابت کرده‌ایم که ممکن نیست گراف اویلری بیش از دو رأس «فرد» داشته باشد. به کمک مسألهٔ قبل می‌توانیم همهٔ نتیجه‌های به‌دست آمده را در یک قضیه بگنجانیم.

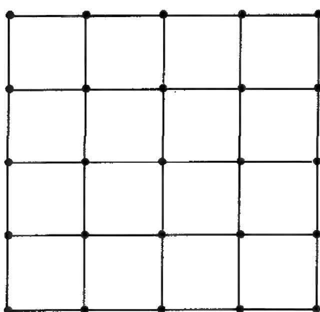
قضیه: وقتی و فقط وقتی گرافی اویلری است که همبند باشد و بیش از دو رأس «فرد» نداشته باشد. توجه کنید که قسمت «وقتی» این قضیه را قبلاً ثابت کرده‌ایم.

در اینجا سه مسألهٔ دیگر می‌آوریم.

مسألهٔ ۲۹. آیا می‌توانیم شبکهٔ شکل ۱۱۶ را

الف) از ۵ خط شکسته هرکدام به طول ۸ به‌دست آوریم؟

ب) از ۸ خط شکسته هرکدام به طول ۵ به‌دست آوریم؟



شکل ۱۱۶

مسألهٔ ۳۰. ۱۰۰ دایره شکلی همبند در صفحه ایجاد کرده‌اند. ثابت کنید می‌توان این شکل را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ یا دو بارکشیدن قسمتی از دایره‌ها رسم کرد.

مسألهٔ ۳۱. ثابت کنید هر گراف همبند با $2n$ رأس «فرد» را می‌توان بی‌آنکه یالی را بیش از یک بار بکشیم طوری رسم کرد که قلم دقیقاً $n - 1$ بار از روی کاغذ برداشته شود.

* * *

مسألهٔ ۳۲. ۵۰ دانشمند در کنفرانسی حضور دارند و هر یک از آنها دست‌کم با ۲۵ نفر دیگر آشناست. ثابت کنید چهار نفر از این دانشمندان وجود دارند که می‌توانند دور میزی گرد طوری بنشینند که هر یک از آنها با دو نفری که کنارش نشسته‌اند آشنا باشد.

مسألهٔ ۳۳. هر یک از ۱۰۲ دانش‌آموز مدرسه‌ای با دست‌کم ۶۸ دانش‌آموز دیگر دوست است. ثابت کنید چهار دانش‌آموز وجود دارند که تعداد دوستانشان برابر است.

مسألهٔ ۳۴*. طول هر مسیر ساده را که دو رأس درختی را به هم وصل می‌کنند فاصلهٔ میان این دو رأس می‌نامیم. مجموع فاصله‌های میان هر رأس با بقیهٔ رأسهای گراف را دوری این رأس می‌نامیم. ثابت کنید تعداد رأسهای درختی که دو رأس دارد که اختلاف دوری آنها برابر با ۱ است عددی فرد است.

مسألهٔ ۳۵. آلیس ۷ درخت روی تخته‌سیاه رسم کرده است که هر کدام شش رأس دارند. ثابت کنید دوتا از این درختها یکریخت‌اند.

مسألهٔ ۳۶. در کشوری هر دو شهر از طریق خط هوایی یا راه‌آهن به هم متصل‌اند. ثابت کنید

الف) می‌توانید یکی از راههای حمل و نقل را طوری انتخاب کنید که از هر شهر به هر شهر دیگر فقط از طریق این نوع روش حمل و نقل بروید.

ب) یک شهر و یک نوع روش حمل و نقل وجود دارد که می‌توانید از این شهر به هر شهر دیگری، فقط از طریق این نوع روش حمل و نقل، با حداکثر یک بار پیاده و سوار شدن بروید.

ج) هر شهری ویژگی اشاره شده در قسمت (ب) را دارد.

د) می‌توانید نوعی از دو روش حمل و نقل را طوری انتخاب کنید که از هر شهری بتوانید به بقیهٔ شهرها فقط از طریق این روش حمل و نقل و حداکثر دو بار پیاده و سوار شدن بروید.

مسألهٔ ۳۷. هر یک از یالهای گرافی کامل و ۶ رأسی را یا آبی کرده‌ایم یا سفید. ثابت کنید سه رأس وجود دارند که همهٔ یالهایی که آنها را به هم وصل می‌کنند به یک رنگ‌اند.

مسألهٔ ۳۸. هر یک از یالهای گرافی کامل و ۱۷ رأسی را یا قرمز کرده‌ایم یا آبی یا سبز. ثابت کنید سه رأس وجود دارند که همهٔ یالهایی که آنها را به هم وصل می‌کنند به یک رنگ‌اند.

مسألهٔ ۳۹*. هر یک از یالهای گرافی کامل و ۹ رأسی را یا آبی کرده‌ایم یا قرمز. ثابت کنید یا چهار رأس وجود دارند که همهٔ یالهایی که آنها را به هم وصل می‌کنند آبی‌اند، یا سه رأس وجود دارند که همهٔ یالهایی که آنها را به هم وصل می‌کنند قرمزند.

مسألهٔ ۴۰*. هر یک از یالهای گرافی کامل و ۱۰ رأسی را یا سیاه کرده‌ایم یا سفید. ثابت کنید چهار رأس وجود دارند که همهٔ یالهایی که آنها را به هم وصل می‌کنند به یک رنگ‌اند.

توصیه به معلمان. قضیهٔ اویلر مهمترین و اصلی‌ترین موضوع این بخش است. باید آن را خیلی مفصل و با آوردن اثبات دقیق بررسی کرد. از بقیهٔ مسأله‌ها به راههای مختلف می‌توان استفاده کرد. طبیعتاً دشوارترین آنها (که با ستاره مشخص شده‌اند) برای کار در منزل اختصاص دارند.

۵. گرافهای جهتدار

موضوع اصلی این بخش گراف جهتدار است؛ یعنی، گرافی که روی یالهایش پیکان قرار دارد. هیچ قضیهٔ مهمی را دربارهٔ این گرافها ثابت نمی‌کنیم؛ با وجود این، مفهوم گراف جهتدار قسمت مهمی از فرهنگ عمومی ریاضی است و این گرافها در مسأله‌های ریاضی خیلی ظاهر می‌شوند.

مسألهٔ ۴۱. دمیتری پس از بازگشت از ناکجاآباد به دوستانش گفت که در آنجا چندین دریاچه وجود دارد که میانشان رودخانه‌ای در جریان است. علاوه بر این، او گفت که در ناکجاآباد از هر دریاچه آب سه رودخانه خارج می‌شود و به هر دریاچه آب چهار رودخانه می‌ریزد. ثابت کنید که او اشتباه می‌کرده است.

راه‌حل. هر رودخانه دو سر دارد که دریاچه‌اند، و آب از یکی از دریاچه‌ها به رودخانه وارد می‌شود و به دریاچهٔ دیگر می‌ریزد. بنابراین، تعداد رودخانه‌هایی که آب از آنها به دریاچه‌ای می‌ریزد برابر با تعداد رودخانه‌هایی است که آب دریاچه‌ای به آنها وارد می‌شود. اما اگر در ناکجاآباد n دریاچه وجود داشته باشد، تعداد رودخانه‌هایی که به دریاچه‌ای می‌ریزند برابر است با $۴n$ و تعداد رودخانه‌هایی که آب دریاچه‌ای به آنها وارد می‌شود برابر است با $۳n$. این تناقض اثبات را کامل می‌کند.

مسألهٔ ۴۲. کشوری یک پایتخت و ۱۰۰ شهر دارد. برخی از شهرها (که پایتخت جزء آنهاست) با جاده‌های یک‌طرفه به هم متصل‌اند. از هر شهر بجز پایتخت دقیقاً ۲۰ جاده خارج شده و دقیقاً ۲۱ جاده به هر شهر بجز پایتخت وارد شده است. ثابت کنید نمی‌توان با اتومبیل از هر شهری به پایتخت رفت و قوانین رانندگی را هم رعایت کرد.

* * *

در هر دو مسألهٔ زیر از خواننده خواسته شده که روی یالهای گرافی که جهتدار نیست پیکانها را طوری قرار دهد که شرطهای موردنظر را داشته باشند.

مسألهٔ ۴۳. درکشوری هر شهر به بقیهٔ شهرها از طریق جاده‌ای متصل است. پادشاه ابله تصمیم گرفته که جاده‌ها را طوری یک‌طرفه اعلام کند که اگر از شهری خارج شدید دیگر نتوانید به آن برگردید. آیا چنین چیزی ممکن است؟

مسألهٔ ۴۴. ثابت کنید می‌توان روی یالهای هرگراف همبند که جهتدار نیست پیکانها را طوری قرار داد و یک رأس را طوری انتخاب کرد که بتوان از این رأس به هر رأس دیگر رفت.

* * *

در مسأله‌های ۴۵ و ۴۶ از مفهوم گراف اویلری و ویژگیهای اصلی آن استفاده می‌شود.

مسألهٔ ۴۵. درجهٔ همهٔ رأسهای گرافی همبند زوج است. ثابت کنید می‌توان پیکانها را روی یالهای این گراف طوری قرار داد که

الف) از هر رأس بتوان در جهت پیکانها به بقیهٔ رأسها رفت.

ب) در هر رأس تعداد یالهایی که وارد می‌شوند با تعداد یالهایی که خارج می‌شوند برابر باشد.

مسألهٔ ۴۶. روی یالهای گرافی همبند پیکانها را طوری قرار داده‌ایم که در هر رأس تعداد یالهایی که وارد می‌شوند با تعداد یالهایی که خارج می‌شوند برابر است. ثابت کنید در جهت پیکانها از هر رأسی به بقیهٔ رأسها می‌توان رفت.

* * *

اگر با روش استقرای ریاضی آشنا باشید، می‌توانید در حل مسأله‌های مجموعهٔ زیر از آن استفاده کنید.

مسألهٔ ۴۷. درکشوری هر شهر به بقیهٔ شهرها با جاده‌ای یک‌طرفه متصل است. ثابت کنید شهری وجود دارد که می‌توانید با ماشین از آن به بقیهٔ شهرها بروید.

راه‌حل. از استقرا روی تعداد شهرها استفاده می‌کنیم. پایهٔ استقرا معلوم است. برای برداشتن گام استقرایی یکی از شهرها را حذف می‌کنیم. در مورد بقیهٔ شهرها، بنابر فرض استقرا، می‌توانیم شهری مانند A پیدا کنیم که ویژگی موردنظر را داشته باشد. اکنون شهر حذف شده را، که آن را B می‌نامیم، به جایش برمی‌گردانیم. اگر دست‌کم یک راه وجود داشته باشد که به B برود، A برای مسألهٔ اصلی هم شهری است که به دنبالش می‌گردیم. اگر همهٔ جاده‌ها از B خارج شوند، B شهری است که می‌خواهیم.

مسألهٔ ۴۸. چند تیم در تورنمنتی شرکت کرده‌اند، به‌طوری‌که هر تیم با بقیهٔ تیمها دقیقاً یک بار بازی می‌کند. می‌گوییم تیم A از تیم B قویتر است، هرگاه A، B را برده باشد یا تیمی وجود داشته باشد که A، C را برده باشد و C، B را.

الف) ثابت کنید تیمی وجود دارد که از بقیهٔ تیمها قویتر است.

ب) ثابت کنید تیمی که تورنمنت را فتح کرده باشد از بقیه قویتر است.

مسألهٔ ۴۹. کشوری ۱۰۰ شهر دارد. هر یک از این شهرها از طریق جاده‌ای یک‌طرفه به بقیهٔ شهرها متصل است. ثابت کنید می‌توان جهت حرکت روی یکی از جاده‌ها را عوض کرد، به‌طوری که پس از آن باز هم بتوان از هر شهری به بقیه رفت.

مسألهٔ ۵۰. بیست تیم در تورنمنت والیبالی شرکت کرده‌اند که در آن هر تیم با بقیهٔ تیمها دقیقاً یک بار بازی می‌کند. ثابت کنید که می‌توان تیمها را با شماره‌های از ۱ تا ۲۰ طوری شماره‌گذاری کرد که تیم ۱ تیم ۲ را برده باشد، تیم ۲ تیم ۳ را برده باشد، . . . و تیم ۱۹ تیم ۲۰ را برده باشد.

* * *

این هم سه مسألهٔ آخر این بخش.

مسألهٔ ۵۱. در تورنمنت والیبالی که در آن هر تیم با بقیهٔ تیمها دقیقاً یک بار بازی می‌کند، امتیاز دو تیم برابر شده است. ثابت کنید تیمهایی مانند A، B و C وجود دارند که A، B را برده است، B، C را برده است و C، A را برده است.

مسألهٔ ۵۲. کشوری ۱۰۱ شهر دارد.

الف) هر شهر به بقیهٔ شهرها با جاده‌ای یک‌طرفه متصل است و در هر شهر ۵۰ جادهٔ وارد شده و ۵۰ جادهٔ خارج شده وجود دارد. ثابت کنید می‌توانید با ماشین از هر شهر به هر شهر دیگر بروید، به‌طوری که حداکثر از دو تا از جاده‌ها عبور کرده باشید.

ب) برخی از شهرها از طریق جاده‌ای یک‌طرفه به هم متصل‌اند و در هر شهر ۴۰ جادهٔ وارد شده و ۴۰ جادهٔ خارج شده وجود دارد. ثابت کنید می‌توانید با ماشین از هر شهر به هر شهر دیگر بروید، به‌طوری که حداکثر از سه تا از جاده‌ها عبور کرده باشید.

مسألهٔ ۵۳*. درکشوری همهٔ جاده‌ها یک‌طرفه‌اند و می‌توانید با ماشین از هر شهر به هر شهر دیگر بروید، به‌طوری که حداکثر از دو تا از جاده‌ها عبور کنید. یکی از جاده‌ها برای تعمیرات مسدود شده است، اما باز هم می‌توان از هر شهر به بقیهٔ شهرها رفت. ثابت کنید در این وضعیت می‌توان این کار را طوری انجام داد که حداکثر از سه جاده عبور کرد.

فصل ۱۴

هندسه

اغلب می‌شنویم که «هندسه، این‌طور که در مدارس می‌خوانند، به کار چه کسی می‌آید؟ این علم فقط به کار خودش می‌آید ـ در ریاضیات عالی واقعاً هیچ خبری از آن نیست و گاهی بیش از حد پیچیده و دشوار می‌شود.»

یکی از جوابها (که البته کامل نیست) این است که «هندسهٔ مدرسه‌ای» زمینهٔ مناسبی برای پرورش تفکر منطقی و اصولی است. این علمی «که فقط به کار خودش می‌آید» بازی با اصول موضوعی است که یونانیان باستان وضع کرده‌اند. اقلیدس و اسلافش (و نیز پیروانش) عمیقاً اعتقاد داشتند که این اصول به اندازهٔ کافی قوانین دنیای حقیقی پیرامونشان را منعکس می‌کردند.

با این همه، اگر هندسه را بازی درنظر بگیریم، در پیچیدگی و زیبایی شاید فقط بتوان آن را با شطرنج مقایسه کرد. امروزه احتمالاً کسی نمی‌تواند به دانستن تمامی رموز هر یک از این دو بازی بزرگ بشر بنازد. این مطلب (و محدودیت حجم این فصل) معلوم می‌کند که چرا در اینجا فقط چند حرکت اول این بازی را بررسی کرده‌ایم.

البته، باید یادآوری کنیم که هندسه جزئی جدانشدنی از ریاضیات است و با بقیهٔ شاخه‌های «ملکهٔ علوم» پیوندهای گوناگونی دارد: معلم خوب در اینجا فرصت مغتنمی دارد که یکپارچگی ریاضیات را نشان دهد.

* * *

نمی‌خواهیم توضیحاتمان را به هیچ‌یک از کتابهای درسی موجود ارجاع دهیم ـ ترجیح می‌دهیم که معلمان مطالب هر جلسه را بر حسب میزان توانایی دانش‌آموزانشان انتخاب کنند. به معلمان توصیه می‌کنیم که به برنامهٔ مدرسه توجه داشته باشند، اما کورکورانه از آن تبعیت نکنند.

دلخور نباشید که بیشتر مسأله‌ها تقریباً شبیه مسأله‌های کتابهای درسی‌اند. در حقیقت، نامعقول است که در «هندسهٔ مدرسه‌ای» انتظار سؤالهای «المپیادی» داشته باشیم ـ کلمهٔ «المپیاد» حال و

هوایی فراتر از نظام آموزشی معمول را تداعی می‌کند، فراتر رفتن از حدود این نظام را. در حقیقت، هندسه درکتابهای درسی متعددی مفصل شرح داده شده است.

۱. دو نابرابری

هندسهٔ دبیرستانی معمولاً دربارهٔ حکمهای دقیقی مانند حکمهای زیر است:

«نقطه‌های A، B و C روی یک خط راست قرار دارند.»

«ارتفاعهای مثلث در یک نقطه به هم می‌رسند.»

«مجموع زاویه‌های مثلث ۱۸۰° درجه است.»

اما در بحثهای اولیه ابزارهای اصلی بی‌شک دو نابرابری زیرند:

نابرابری شمارهٔ ۱. به‌ازای هر سه نقطه روی صفحه مانند A، B و C،

$$AB + BC \geqslant AC$$

و تساوی وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که B روی پاره‌خط AC باشد.

نابرابری شمارهٔ ۲. در هر مثلث، در میان هر دو ضلع، ضلع بزرگتر روبه‌روی زاویه‌ای بزرگتر است. یعنی اگر در مثلث ABC، $AB > AC$، آن‌وقت $\angle C > \angle B$، و برعکس.

در این فصل این نابرابریها را یک بار دیگر یادآوری کردیم و چند کاربرد از آنها را می‌آوریم.

مسألهٔ ۱. ثابت کنید اگر

$$b + c > a, \quad a + c > b, \quad a + b > c$$

که در آنها a، b و c عددهایی مثبت‌اند، آن‌وقت مثلثی وجود دارد که طول ضلعهایش a، b و cاند.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید طول میانهٔ AM در مثلث ABC از

$$\frac{۱}{۲}(AB + AC - BC)$$

بزرگتر است.

مسألهٔ ۳. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی می‌توانید با پاره‌خطهایی به طولهای a، b و c مثلثی تشکیل دهید که عددهایی مثبت مانند x، y و z وجود داشته باشند که

$$a = x + y, \quad b = y + z, \quad c = z + x$$

مسألهٔ ۴. با استفاده از نابرابری شمارهٔ ۲ ثابت کنید که اگر $AB = AC$، آن‌وقت زاویه‌های ABC و ACB برابرند.

مسألهٔ ۵. در مثلث ABC میانهٔ AM از نصف BC بلندتر است. ثابت کنید زاویهٔ BAC حاده است.

توصیه به معلمان. ممکن است مسأله‌های ۵–۱ برای برخی دانش‌آموزان خیلی ساده باشند، به ویژه اگر با همین مبحث در برنامهٔ مدرسه برخورد کرده باشند. پس از بحث دربارهٔ راه‌حلهای این مسأله‌های ساده، این دانش‌آموزان می‌توانند به سراغ مسأله‌های دشوارتر زیر بروند.

مسألهٔ ۶. ثابت کنید اگر بتوانید با پاره‌خطهایی به طولهای a، b و c مثلثی تشکیل دهید، می‌توانید همین کار را با پاره‌خطهایی به طولهای $\sqrt{a}$، $\sqrt{b}$ و $\sqrt{c}$ هم انجام دهید.

مسألهٔ ۷. چهارضلعی $ABCD$ محدب است و

$$AB + BD < AC + CD$$

ثابت کنید $AB < AC$.

مسألهٔ ۸. مرکزهای سه دایرهٔ غیرمتقاطع روی یک خط راست قرار دارند. ثابت کنید اگر دایرهٔ چهارمی بر هر سه این دایره‌ها مماس باشد، شعاعش از شعاع دست‌کم یکی از سه دایرهٔ مفروض بزرگتر است.

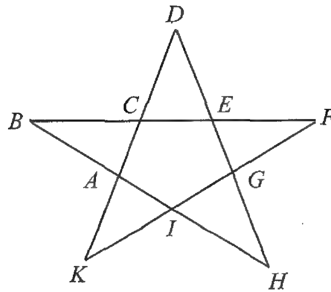
مسألهٔ ۹. فرض کنید $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ دو چهارضلعی محدب باشند که ضلعهای نظیرشان برابرند. ثابت کنید اگر $\angle A > \angle A_1$، آن‌وقت

$$\angle B < \angle B_1, \quad \angle C > \angle C_1, \quad \angle D < \angle D_1$$

مسألهٔ ۱۰. ثابت کنید میانهٔ مثلث که میان دو ضلع نابرابرش قرار دارد با ضلع کوچکتر زاویهٔ بزرگتر می‌سازد.

مسألهٔ ۱۱. آیا ستارهٔ پنج‌رأسی‌ای مانند $ABCDEFGHIK$ (شکل ۱۱۷ را ببینید) وجود دارد که در آن $AB > BC$، $CD > DE$، $EF > FG$، $GH > HI$ و $IK > KA$؟

یادداشت. این چند مسأله از مسأله‌های ۵–۱ دشوارترند، اما حل کردنشان خیلی هم سخت نیست. مسأله‌های دیگری با این موضوع را می‌توانید در فصل «نابرابری مثلث» پیدا کنید.



شکل ۱۱۷

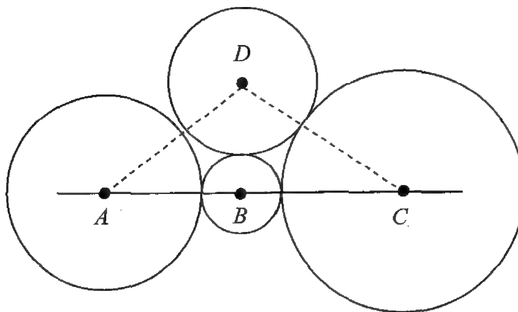
توصیه به معلمان. توصیه می‌کنیم که یک جلسهٔ کامل را به این بخش اختصاص ندهید، و معتقدیم که بهتر است در چندین جلسه ۲-۳ تا از این مسأله‌ها را به دانش‌آموزانتان بدهید. هدف این است که نابرابریهای مثلث ملکهٔ ذهن دانش‌آموزان شود، آن هم نه به عنوان «الگوی مسأله حل کردن» دیگری، بلکه به‌عنوان چیزی که اساسی است و اغلب ناخودآگاه از آن استفاده می‌شود.

مسألهٔ ۸ را حل می‌کنیم. این مسأله از این نظر قابل توجه است که می‌توان آن را هم با نابرابری شمارهٔ ۱ حل کرد هم با نابرابری شمارهٔ ۲.

راه‌حل (با نابرابری شمارهٔ ۱). می‌توانیم فرض کنیم که دایرهٔ چهارم بر بقیهٔ دایره‌ها مماس خارج است (شکل ۱۱۸ را ببینید) (در غیر این صورت شعاع دایرهٔ چهارم از شعاع دایره‌ای که بر آن مماس داخل است بزرگتر است). بنابراین، اگر مرکز دایره‌ها را با A، B، C و D و شعاعهای متناظرشان را با $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$ و R نشان دهیم، آن‌وقت بنابر نابرابری مثلث، $AD + DC > AC$؛ یعنی،

$$R + r_۱ + R + r_۳ > AC > r_۱ + r_۳ + ۲r_۲$$

و در نتیجه $R > r_۲$.



شکل ۱۱۸

راه‌حل (با نابرابری شمارهٔ ۲). یکی از زاویه‌های DBA و DBC حاده نیست و در نتیجه، بزرگترین زاویه در مثلث DBA یا DBC است. بدون اینکه از کلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم که این زاویه DBA است. در این صورت از نابرابری شمارهٔ ۲ نتیجه می‌شود که $DA > AB$؛ یعنی،

$$R + r_۱ > AB > r_۱ + r_۲$$

یا $R > r_۲$.

* * *

در انتهای این بخش چند مسأله می‌آوریم که برای حل کردن آنها به نابرابریهای مثلث و ایده‌ای دیگر احتیاج است.

مسألهٔ ۱۲. مثلث متساوی‌الساقین ABC که زاویهٔ رأس آن، B، برابر با °۲۰ درجه است مفروض است. ثابت کنید

الف) $AB < ۳AC$؛

ب) $AB > ۲AC$.

مسألهٔ ۱۳. محیط ستارهٔ پنج‌رأسی‌ای که رأسهایش بر رأسهای پنج‌ضلعی F منطبق‌اند، محیط خود F و محیط پنج‌ضلعی درونی ستاره عددهایی اول‌اند. ثابت کنید مجموع این محیطها از ۲۰ کمتر نیست.

یادداشت. تعجب نکنید که این مسأله، مسأله‌ای هندسی است.

مسألهٔ ۱۴. روی هر یک از ضلعهای مربعی نقطه‌ای انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید محیط چهارضلعی پدید آمده با این نقطه‌ها از دو برابر طول قطر مربع کمتر نیست.

۲. حرکتهای صلب صفحه و همنهشتی

این موضوع مملو از مطالب جالب و ارتباطهایی با ریاضیات عالی است. دانش‌آموزان باید به درک نقش تقارن در ریاضیات و مفهوم گروه، که اساس بیشتر ریاضیات عالی است، رهنمون شوند. گروههای بلورشناختی، ویژگیهای جبری گروه حرکتهای صلب صفحه و هندسهٔ لباچفسکی به این موضوع مهم ربط دارند.

توصیه به معلمان. ۱. فرض کرده‌ایم که دانش‌آموزان با قضیه‌های اصلی همنهشتی آشنا هستند (کتاب درسی هندسه را ببینید).

۲. در شروع مطالعهٔ حرکتهای صلب صفحه، از دانش‌آموزان بخواهید که هرگونه حرکت صلبی را که می‌شناسند فهرست کنند. تعریف طولپایی (یا حرکت صلب) بسیار ساده است: طولپایی تبدیلی از صفحه است که طول را حفظ می‌کند. به‌نظر می‌رسد که فقط چند تا از این نوع تبدیلها وجود دارد: انتقال، دوران، تقارن نسبت به خط و تقارن لغزه‌ای (ترکیب تقارن نسبت به خط و انتقال).

باید راه‌حل مسأله‌های زیر را با دقت توضیح داد، زیرا بعداً به‌کار می‌آیند.

مسألهٔ ۱۵. ثابت کنید دو مثلث مفروض، هر یک با طول ضلعهای a، b و c، را می‌توان با حرکت دادن یکی از آنها در صفحه (یا شاید تقارن نسبت به یک خط) بر هم منطبق کرد. به‌عبارت دیگر، این دو همنهشت‌اند.

مسألهٔ ۱۶. الف) اگر حرکت صلب T همهٔ رأسهای مثلث ABC را در جایشان نگه دارد، آن‌وقت T تبدیل همانی است.

ب) اگر دو حرکت صلب T و T' رأسهای مثلث ABC را به نقطه‌های A'، B' و C' ببرند، آن‌وقت T و T' یک تبدیل‌اند (یعنی، تصویر هر نقطه تحت اثر T و تحت اثر T' یکی است).

مسألهٔ ۱۷. الف) ترکیب دو انتقال چیست؟

ب)* ثابت کنید هر انتقال را می‌توان به شکل ترکیب دو تقارن نسبت به دو نقطه مانند M و N نوشت.

ج) * حرکت صلبی را در نظر بگیرید که ترکیب تقارن نسبت به خط m و انتقال به طول واحد در جهتی موازی با خط m است. ثابت کنید این حرکت صلب نه دوران است، نه انتقال، نه تقارن نسبت به خط.

توصیه به معلمان. دربارهٔ راه‌حل هندسی مسألهٔ آخر باید کاملاً بحث کرد تا مطمئن شد که دانش‌آموزان مفهوم ترکیب را یاد گرفته‌اند. احتمالاً این مسأله برای تکلیف منزل مناسبتر است تا مسأله‌ای حل کردنی در سر کلاس.

مسألهٔ ۱۸. دو دایرهٔ برابر مفروض‌اند. آیا همواره می‌توان یکی از آنها را با دوران بر دیگری تصویر کرد؟

مسألهٔ ۱۹. آیا ممکن است دورانی نیمصفحه را بر خودش تصویر کند؟ تقارن نسبت به خط چطور؟

مسألهٔ ۲۰. معلوم شده است که شکلی در صفحه پس از دورانی به‌اندازهٔ ۴۸ درجه حول نقطهٔ O بر خودش منطبق می‌شود. آیا لزوماً درست است که پس از دورانی به‌اندازهٔ ۷۲ درجه حول همان نقطه بر خودش منطبق می‌شود؟

توصیه به معلمان. ۱. بررسی حرکتهای صلب و ترکیبهای آنها فرصتی مغتنم برای بحث کلی دربارهٔ نگاشتها و ترکیبهای آنها، با مثالهایی هم از جبر هم از هندسه، است.

۲. ممکن است زمانی دانش‌آموزان سؤال کنند که آیا می‌دانند که چگونه می‌توان (فقط با خط‌کش و پرگار) حرکتهای صلب صفحه را «رسم» کنند. مثلاً، آیا می‌توانند تصویر دایره‌ای را در تقارن نسبت به خطی مفروض رسم کنند؟

مبحث بعدی نحوهٔ استفاده از حرکتهای صلب برای حل کردن مسأله‌های هندسی است. این موضوع، کتابی (خیلی حجیم) مختص به خودش می‌خواهد. سعی می‌کنیم با آوردن چند مثال ایده‌های اصلی را معرفی کنیم.

مسألهٔ ۲۱. نقطهٔ A درون مثلثی مفروض است. پاره‌خطی رسم کنید که دو سرش روی مثلث باشد و نقطهٔ A این پاره‌خط را به دو نیم تقسیم کنند.

مسألهٔ ۲۲. برگه‌ای کاغذی و دو خط داده شده‌اند. خطها موازی نیستند، اما یکدیگر را در بیرون برگهٔ کاغذی قطع کرده‌اند. زاویه‌ای رسم کنید که اندازه‌اش دو برابر زاویهٔ میان این دو خط باشد.

مسألهٔ ۲۳. در دایره‌ای مفروض پنج‌ضلعی‌ای محاط کنید که ضلعهایش با پنج خط راست داده شده موازی باشند.

مسألهٔ ۲۴. در ذوزنقهٔ $ABCD$ (که در آن $AD \parallel BC$) نقطه‌های M و N وسط قاعده‌ها هستند و خط MN با خطهای AB و CD زاویه‌های برابر می‌سازد. ثابت کنید این ذوزنقه متساوی‌الساقین است.

مسألهٔ ۲۵. نقطه‌های P، Q، R و S به‌ترتیب روی ضلعهای AB، BC، CD و DA از مربع $ABCD$ طوری انتخاب شده‌اند که

$$\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RD} = \frac{DS}{SA}$$

ثابت کنید $PQRS$ مربع است.

مسألهٔ ۲۶. نقطهٔ P و دو خط موازی در صفحه مفروض‌اند. مثلثی متساوی‌الاضلاع رسم کنید که یکی از رأسهایش نقطهٔ P باشد و دو رأس دیگرش روی خطهای مفروض قرار داشته باشند.

مسألهٔ ۲۷. روی خطی مفروض نقطه‌ای مانند M پیدا کنید که

الف) مجموع فاصله‌های M تا دو نقطهٔ مفروض کمترین مقدار ممکن باشد.

ب) تفاضل این فاصله‌ها بیشترین مقدار ممکن باشد.

باز هم تکرار می‌کنیم که تقریباً غیرممکن است دربارهٔ این بخش زیبای هندسه همه‌چیز را دانست. در زیر چند مثال دیگر آورده‌ایم که مربوط به ویژگیهای حرکتهای صلب و تقارن شکلها در صفحه‌اند.

مسألهٔ ۲۸. ثابت کنید اگر مثلثی دو محور تقارن داشته باشد، دست‌کم سه محور تقارن دارد.

مسألهٔ ۲۹. کدام حروف الفبای انگلیسی محور تقارن دارند؟ کدام حروف مرکز تقارن دارند؟

مسألهٔ ۳۰. آیا پنج‌ضلعی‌ای وجود دارد که دقیقاً دو محور تقارن داشته باشد؟

مسألهٔ ۳۱. مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های صفحه مانند X روی صفحه را پیدا کنید که دورانی مفروض X را به X' ببرد و خط راست XX' از نقطهٔ مفروض S بگذرد.

* * *

راه‌حل مسألهٔ نسبتاً دشوار ۲۳ را بررسی می‌کنیم.

به‌جای پنج خط مفروض L_1، L_2، ... و L_5 خطهای K_1، K_2، ... و K_5 را در نظر بگیرید که بر این خطها عمودند و از مرکز دایره می‌گذرند. در این صورت معلوم است که خطهای L_i و AB (که در اینجا A و B دو نقطه روی دایره‌اند) وقتی و فقط وقتی موازی‌اند که A و B نسبت به خط K_i قرینهٔ هم باشند. می‌ماند اینکه روی دایره نقطه‌ای مانند M پیدا کنیم که اگر پی‌درپی خودش و تصویرهایش را نسبت به خطهای K_1، K_2، ... و K_5 قرینه کردیم تصویر آخر بر M منطبق شود. چون ترکیب پنج تقارن نسبت به خط باز هم تقارن نسبت به خط است (که محورش از مرکز دایره می‌گذرد)، چنین نقطه‌ای باید وجود داشته باشد و یکی از نقطه‌هایی است که این محور تقارن و دایره یکدیگر را قطع می‌کنند.

سؤال. راه‌حل بالا اشکال کوچکی دارد. آن را پیدا و برطرف کنید.

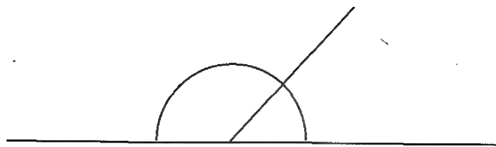
۳. محاسبهٔ زاویه‌ها

برای محاسبهٔ زاویه‌های شکلهای هندسی باید چه چیزی را بدانید؟ در اینجا فقط به اصلی‌ترینها اشاره می‌کنیم:

۱. مجموع زاویه‌های مثلث °۱۸۰ درجه است.

۲. دو زاویهٔ متقابل به رأس برابرند.

۳. مجموع زاویه‌هایی که روی یک خط راست قرار دارند برابر با °۱۸۰ درجه است (شکل ۱۱۹ را ببینید).



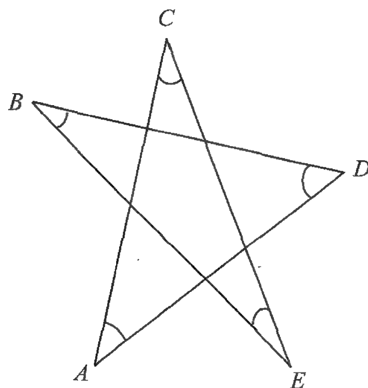
شکل ۱۱۹

۴. هر زاویهٔ محاطی برابر با نصف زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به همان کمان است، و در نتیجه
۵. دو زاویهٔ محاطی روبه‌رو به یک کمان برابرند.
۶. حرکتهای صلب صفحه اندازهٔ زاویه را تغییر نمی‌دهند.

* * *

مسألهٔ ۳۲. نیمساز BK در مثلث متساوی‌الساقین ABC، که در آن زاویهٔ A برابر با ۳۶ درجه است، رسم شده است. ثابت کنید $BK = BC$.

مسألهٔ ۳۳. ثابت کنید مجموع زاویه‌های رأسهای ستاره‌ای پنج‌رأسی (شکل ۱۲۰ را ببینید) برابر با 180° است.



شکل ۱۲۰

مسألهٔ ۳۴. آیا ممکن است دو نیمساز مثلثی بر هم عمود باشند؟

راه‌حل مسألهٔ ۳۲. چون $\angle C = 72^\circ$ و $\angle B = 72^\circ$، پس $\angle KBC = 36^\circ$ و در نتیجه، $\angle CKB = 72^\circ$. بنابراین مثلث KBC متساوی‌الساقین است و $BK = BC$.

راه‌حل مسألهٔ ۳۳. معلوم است که

$$\begin{aligned} ۱۸۰^\circ &= \angle EBD + \angle BED + \angle BDE \\ &= \angle E + \angle B + \angle D + \angle FED + \angle FDE \end{aligned}$$

چون

$$\begin{aligned} \angle FED + \angle FDE &= ۱۸۰^\circ - \angle EFD \\ &= ۱۸۰^\circ - \angle CFA \\ &= \angle A + \angle C \end{aligned}$$

پس

$$۱۸۰^\circ = \angle E + \angle B + \angle D + \angle A + \angle C$$

به این ترتیب، معلوم می‌شود که روش کار به شکل زیر است: برخی زاویه‌ها را با α، β، γ، δ، ... نشان می‌دهیم، بعد بقیهٔ زاویه‌ها را برحسب این زاویه‌ها می‌نویسیم. آخر سر، با استفاده از حکمهای (۱)–(۶) نتیجهٔ موردنظر را به‌دست می‌آوریم.

یادداشت. در اینجا دو جور وضعیت پیش می‌آید. از یک طرف، اگر فقط یکی یا دو تا از زاویه‌ها را با حروف نشان دهیم، ممکن است نتوانیم زاویه‌های باقی‌مانده و پارامترهای مسأله را برحسب متغیرهای معرفی شده بنویسیم. از طرف دیگر، اگر تعداد زیادی از زاویه‌ها را به‌عنوان متغیرهای نامعلوم درنظر بگیریم، نقشه‌مان درهم برهم می‌شود و به هدفمان نمی‌رسیم (زیرا ممکن است رابطه‌های احتمالی میان زاویه‌های مفروض مشخص نشود).

توصیه به معلمان. معمولاً انتخاب زاویه‌های «آغازین» (و تعدادشان) یکی از بخشهای مهم راه‌حل است. آموختن اینکه چگونه متغیرهای آغازین (در این مورد، زاویه‌ها) را انتخاب کنیم از اجزائی اصلی فرهنگ ریاضی در سطح «المپیاد» است. فقط تجربهٔ زیاد یا نحوهٔ تفکر درست پرورش‌یافته ممکن است به دانش‌آموزان برای انتخاب درست کمک کند.

در اینجا پنج مسألهٔ دیگر می‌آوریم.

مسألهٔ ۳۵. وترهای AB و CD در دایرهٔ S موازی‌اند. ثابت کنید $AC = BD$.

مسألهٔ ۳۶. نسبت سه زاویهٔ متوالی در چهارضلعی‌ای محاطی برابر با ۴ : ۳ : ۲ است. اندازهٔ این زاویه‌ها را پیدا کنید.

مسألهٔ ۳۷. در مثلث ABC، $\angle A = ۹۰^\circ$. میانهٔ AM، نیمساز AK و ارتفاع AH رسم شده‌اند. ثابت کنید $\angle MAK = \angle KAH$.

مسألهٔ ۳۸. مربع $ABCD$ مفروض است. دایره‌ای به شعاع AB و مرکز A رسم کرده‌ایم. این دایره عمودمنصف BC را در دو نقطه قطع می‌کند، که یکی از آنها O است و به C نزدیکتر است. اندازهٔ زاویهٔ AOC را پیدا کنید.

مسألهٔ ۳۹. دو دایره یکدیگر را در نقطه‌های A و B قطع کرده‌اند. AC قطری از دایرهٔ اول و AD قطری از دایرهٔ دوم است. ثابت کنید نقطه‌های B، C و D روی یک خط راست قرار دارند.

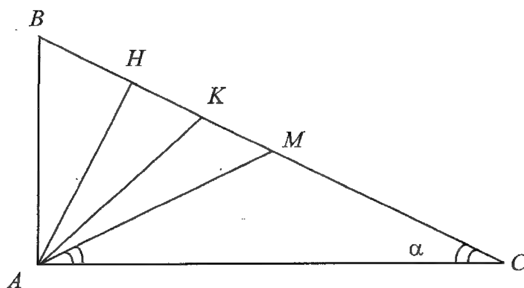
راه‌حل مسألهٔ ۳۷ تقریباً سر راست است.

زاویهٔ BCA را α می‌نامیم (شکل ۱۲۱ را ببینید). در این صورت، چون $AM = MC$، $\angle MAC = \alpha$ و در نتیجه، $\angle MAK = ۴۵^\circ - \alpha$ (پس معلوم می‌شود که α زاویه‌ای است که از ۴۵ درجه بیشتر نیست). علاوه بر این،

$$\angle ABC = ۹۰^\circ - \alpha$$

و در نتیجه $\angle BAH = \alpha$. بنابراین،

$$\angle KAH = ۴۵^\circ - \alpha = \angle MAK$$



شکل ۱۲۱

توصیه به معلمان. ۱. مسأله‌های دشوارتری دربارهٔ محاسبهٔ زاویه‌ها وجود دارد. درحقیقت، بیشتر مسأله‌های هندسهٔ مدرسه‌ای در مورد محاسبهٔ زاویه‌ها هستند، درنتیجه خوب است عادت کنیم اندازهٔ زاویه‌ها را روی شکلها مرتب و منظم بنویسیم.

۲. اعتقاد ما بر این است که موضوع محاسبهٔ زاویه‌ها برای یک جلسه زیاد است. اگر چند سری مسأله تهیه کنید و راه‌حل آنها را در چند جلسهٔ مختلف بخواهید کافی است.

۴. مساحت

این مبحث همان‌قدر گسترده است که بقیهٔ مباحث هندسی، در نتیجه بیشتر به روشها می‌پردازیم. ایده‌های اصلی حل مسأله‌های مربوط به مساحت کدام‌اند؟

اصلی‌ترین مطالب را مشخص می‌کنیم:

الف) اصلی‌ترین ویژگی مساحت این است که تحت حرکتهای صلب صفحه ناورداست و اگر شکلی به دو شکل مجزا تجزیه شود، مساحتش برابر است با مجموع این مساحتهای کوچکتر.

ب) دستورهای اصلی: $S = \frac{ah}{۲}$ (که در آن S مساحت مثلث، a طول ضلعی از آن و h طول ارتفاع وارد بر این ضلع است)؛ $S = rp$ (که در آن S مساحت مثلث، p نصف محیط و r شعاع دایرهٔ محاطی مثلث است).

ج) نابرابری $S \leqslant \frac{ab}{۲}$ درست است (که در آن S مساحت مثلث است و a و b طول دو ضلع مثلث‌اند)؛ مسألهٔ ۴۰ را ببینید.

د) اگر در صورت مسأله‌ای هندسی عبارتهایی نظیر ab یا $a^۲ + b^۲$ (یعنی، عبارتهایی درجهٔ دوم) وجود داشته باشند، خوب است حل کردن مسأله با استفاده از مساحت را هم امتحان کنید.

ه) اگر در صورت مسأله عبارتهایی وجود داشته باشد که به‌طور طبیعی با دستوری برای مساحت به هم مربوط باشند، این دستور را بنویسید و این راه را امتحان کنید ــ این کار اصلاً ضرر ندارد.

از اینجا به بعد مساحت شکل F را با $|F|$ نشان می‌دهیم.

توصیه به معلمان. موارد (الف)، (ب) و (ج) آگاهی دانش‌آموزانتان را دربارهٔ مساحت گسترش می‌دهند.

توصیه می‌کنیم که جلسه‌ای کامل را به بحث دربارهٔ این موضوع اختصاص ندهید، البته مفاهیم اساسی این موضوع را باید کاملاً درست آموزش داد. با چند جلسه نمی‌توان این کار را کرد. فقط پس از اینکه یک سال سمینارهای موفق برگزار کردید می‌توانید به بخشهای نظری این شاخه *از* هندسه (مانند اصول موضوع هندسه) بپردازید.

مسألهٔ ۴۰. طول ضلعهای چهارضلعی‌ای محدب (به ترتیب ساعتگرد) برابر است با a، b، c و d. ثابت کنید مساحت این چهارضلعی از

الف) $\frac{ab+cd}{۲}$ بیشتر نیست.

ب) $\frac{(a+b)(c+d)}{۴}$ بیشتر نیست.

مسألهٔ ۴۱. آیا ممکن است نسبت سه ارتفاع مثلثی ۳ : ۲ : ۱ باشد؟

مسألهٔ ۴۲. طول ضلعهای مثلثی به مساحت ۱ برابر است با a، b و c، که در اینجا $a \geqslant b \geqslant c$. ثابت کنید $b \geqslant \sqrt{۲}$.

مسألهٔ ۴۳. اگر طول همهٔ ضلعهای مثلثی از ۱۰۰۰ اینچ بیشتر باشد، آیا ممکن است مساحتش از ۱ اینچ مربع کمتر باشد؟

راه‌حل مسألهٔ ۴۱. فرض کنید S مساحت مثلثی باشد که طول ضلعهایش a، b و c است. در این صورت ارتفاعها برابرند با $\frac{۲S}{a}$، $\frac{۲S}{b}$ و $\frac{۲S}{c}$ و $a : b : c = ۱ : \frac{۱}{۲} : \frac{۱}{۳}$، که با نابرابری مثلث تناقض دارد.

چگونه به فکرمان رسید که مساحت و ضلعهای مثلث را در نظر بگیریم؟ مورد (ه) در ابتدای این بخش را ببینید.

سه مسألهٔ قبل نمونه‌های خوبی از موضوع «مساحت و نابرابریها» هستند. در زیر چند مسأله آورده‌ایم که دربارهٔ محاسبات «دقیق»ترند.

مسألهٔ ۴۴. نقطه‌های K، L، M و N وسط ضلعهای چهارضلعی $ABCD$اند. ثابت کنید

$$۲|KLMN| = |ABCD|$$

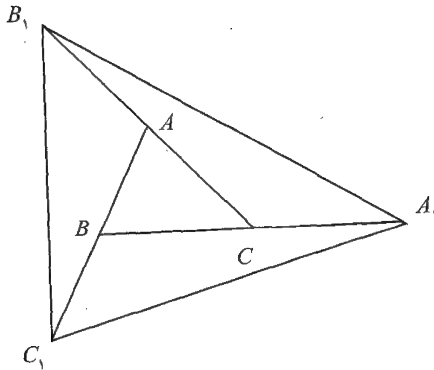
مسألهٔ ۴۵. مساحت چهارضلعی محدب $ABCD$ را پیدا کنید، که در آن خط AC بر خط BD عمود است، $AC = ۳$ و $BD = ۸$.

مسألهٔ ۴۶. مثلث ABC مفروض است. نقطهٔ $A_۱$ روی امتداد BC از سمت C قرار دارد و $BC = CA_۱$. نقطه‌های $B_۱$ و $C_۱$ را هم به‌همین ترتیب انتخاب می‌کنیم (شکل ۱۲۲ را ببینید). اگر $|ABC| = ۱$، $|A_۱B_۱C_۱|$ را پیدا کنید.

مسألهٔ ۴۷. نقطهٔ M درون مثلث ABC قرار دارد. ثابت کنید وقتی و فقط وقتی مساحت مثلثهای ABM و BCM برابر است که M روی میانهٔ BK قرار داشته باشد.

سرانجام، مسأله‌هایی که راه‌حلشان هم محاسبه می‌خواهد هم اثبات.

مسألهٔ ۴۸. ثابت کنید اگر وسطهای همهٔ ضلعهای دو چهارضلعی یکی باشد، مساحتهایشان برابر است.



شکل ۱۲۲

مسألهٔ ۴۹. قطرهای ذوزنقهٔ $ABCD$ (که در آن $BC \parallel AD$) در نقطهٔ O به‌هم رسیده‌اند. ثابت کنید مساحت مثلثهای AOB و COD برابر است.

مسألهٔ ۵۰. ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه درون مثلث متساوی‌الاضلاع تا ضلعهای آن به جای این نقطه بستگی ندارد.

توصیه به معلمان. اگر مسأله‌های ۴۴–۴۷ را حل کنیم معلوم می‌شود که اگر مسأله‌ای مربوط به مساحت باشد، می‌توان از ایده‌های هندسی معمولی هم استفاده کرد: همنهشتی مثلثها، تشابه و قضیهٔ تالس.[1] چنین چیزی کاملاً طبیعی است. با چنین مثالهایی می‌توانید به دانش‌آموزانتان نشان دهید که معمولاً راه‌حل مسأله‌ها از چندین ایده به‌دست می‌آیند. به‌ندرت پیش می‌آید که مسأله‌ای «المپیادی» را بتوان در یک حرکت حل کرد. این موضوع از اصول کلی مسأله حل کردن است، و در مورد ریاضیات عالی همان‌قدر پیش می‌آید که در المپیادها و دیگر مسابقه‌ها.

۵. گوناگون

این بخش از سه مجموعه مسأله تشکیل شده که دربارهٔ موضوعاتی‌اند که در این فصل نیامده‌اند. این مسأله‌ها بیشتر برای تکلیف منزل‌اند و می‌توان آنها را تمرینهایی برای مطالعهٔ عمیقتر دانست.

مجموعهٔ ۱. ترسیمات

مسألهٔ ۵۱. مثلثی را با معلومات زیر رسم کنید:

۱. قضیهٔ تالس، یکی از قدیمیترین نتیجه‌های هندسی به یادگار مانده، این است که هر خط موازی یکی از ضلعهای مثلث، دو ضلع دیگر را به یک نسبت تقسیم می‌کند.

الف) قاعده، ارتفاع و یکی از زاویه‌های مجاور به قاعده.
ب) وسط سه ضلع.
ج) طول دو تا از ضلعها و میانهٔ نظیر ضلع سوم.
د) دو خط راست که دو تا از نیمسازها روی آنها قرار دارند و رأس سوم.

مسألهٔ ۵۲*. وسط پاره‌خطی را با استفاده از
الف) فقط پرگار،
ب) خطکش دو لبه (با لبه‌های موازی) که پهنایش از طول پاره‌خط کمتر است،
ج) خطکش دو لبه (با لبه‌های موازی) که پهنایش از طول پاره‌خط بیشتر است،
پیدا کنید.

مسألهٔ ۵۳. پاره‌خط AB در صفحه مفروض است. نقطه‌ای دلخواه مانند M روی این پاره‌خط انتخاب کرده‌ایم و مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین AMC و BMD را طوری روی پاره‌خطهای AM و MB (به‌عنوان وترها) رسم کرده‌ایم که نقطه‌های C و D در یک طرف AB قرار دارند. مجموعهٔ نقطه‌های وسط پاره‌خطهایی مانند CD را پیدا کنید.

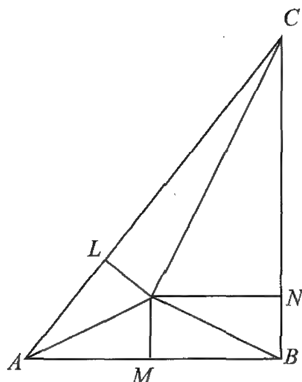
مسألهٔ ۵۴. می‌توان از وسیله‌ای برای رسم کردن
الف) خطی که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد،
ب) عمودی بر خطی مفروض در نقطه‌ای روی این خط، استفاده کرد.
نشان دهید که چگونه می‌توان از این وسیله برای رسم کردن عمودی بر خطی از هر نقطه روی آن استفاده کرد.

مسألهٔ ۵۵. پیتر ادعا می‌کند که مجموعهٔ نقطه‌های روی صفحه که از خطی مفروض و نقطه‌ای مفروض به یک فاصله‌اند دایره است. آیا درست می‌گوید؟

مجموعهٔ ۲. محاسبات

مسألهٔ ۵۶. اشکال «اثبات» غلط زیر را برای اینکه در هر مثلث قائم‌الزاویه طول وتر با طول یکی از ضلعهای زاویهٔ قائمه برابر است پیدا کنید (شکل ۱۲۳ را ببینید). نقطهٔ M محل تلاقی نیمساز زاویهٔ C و عمودمنصف پاره‌خط AB است. نقطه‌های K، L و N پای عمودهای وارد از M بر ضلعهای مثلث‌اند. مثلثهای AMK و MKB همنهشت‌اند، زیرا وترها و ضلعهای زاویهٔ قائمه‌شان برابر است. بنابراین $AM = MB$، و مثلثهای ALM و MNB به‌همین دلیل همنهشت‌اند. به این ترتیب، $AL = NB$ و

$$AC = AL + LC = NB + CN = BC$$



شکل ۱۲۳

مسألهٔ ۵۷. $ABCD$ چهارضلعی است، $AD = BC$ و M و N به‌ترتیب وسط AD و BCاند. عمودمنصفهای پاره‌خطهای AB و CD در نقطهٔ P به‌هم رسیده‌اند. ثابت کنید P روی عمودمنصف پاره‌خط MN هم قرار دارد.

مسألهٔ ۵۸. مثلثی قائم‌الزاویه که یکی از زاویه‌های حاده‌اش ۳۰° است مفروض است. ثابت کنید طول قسمتی از عمودمنصف وتر این مثلث که درون مثلث قرار دارد برابر است با یک سوم طول ضلع زاویهٔ قائمهٔ بلندتر مثلث.

مسألهٔ ۵۹. ارتفاعهای $AA_۱$، $BB_۱$، $CC_۱$ و میانه‌های $AA_۲$، $BB_۲$ و $CC_۲$ در مثلث ABC رسم شده‌اند. ثابت کنید طول خط شکستهٔ $A_۱B_۲C_۱A_۲B_۱C_۲A_۱$ برابر است با محیط مثلث ABC.

مجموعهٔ ۳. تشابه

مسألهٔ ۶۰. یکی از قطرهای چهارضلعی‌ای محاطی قطر دایرهٔ محیطی این چهارضلعی است. ثابت کنید تصویرهای هر دو ضلع روبه‌رو در این چهارضلعی بر قطر دیگرش با هم برابرند.

مسألهٔ ۶۱. کمان AB، به‌اندازهٔ ۶۰°، روی دایره‌ای به مرکز O مفروض است و نقطهٔ M روی این کمان اختیار شده است. ثابت کنید خط راستی که از وسط پاره‌خطهای MA و OB می‌گذرد بر خط راستی که از وسط پاره‌خطهای MB و OA می‌گذرد عمود است.

مسألهٔ ۶۲. نیمساز AD در مثلث ABC رسم شده است. ثابت کنید $\frac{CD}{DB} = \frac{CA}{AB}$.

مسألهٔ ۶۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC عمود HE از نقطهٔ H، وسط BC، بر ضلع AC رسم شده است. ثابت کنید اگر O وسط HE باشد، خطهای AO و BE بر هم عمودند.

کلام آخر

۱. مبحث «نابرابریهای هندسی» راکه در بخش ۱ به‌طورگذرا به آن اشاره کردیم می‌توان بیشتر مطالعه کرد. برخی گوهرهای زیبای هندسه، نظیر نابرابریهای برابرمحیطی، از نابرابری سادهٔ مثلث به‌دست می‌آیند.

۲. فراموش نکنید که در این فصل هم برخی مباحث و مسأله‌ها را مطرح کردیم هم راههایی را برای برگزاری جلسات نشان دادیم. امیدواریم که روشهای آموزشی مطرح شده در این فصل برایتان مفید باشد.

۳. «محاسبهٔ زاویه‌ها» فقط یکی از مباحث «هندسهٔ محاسباتی» است، که می‌توان به این موضوع هم پرداخت.

۴. در بخش «مساحت» مسأله‌ها، برخلاف مباحث دیگر این فصل، از همان ابتدا کمی دشوارتر بودند. می‌توانید مسأله‌های ساده‌تری را درکتابهای درسی پیدا کنید.

۵. **توصیه به معلمان.** اگر نتوان مسأله‌ای را با حمله‌ای برق‌آسا «به دام انداخت»، احتمالاً باید کار را به محاصره‌ای همه‌جانبه و درازمدت (که ممکن است روزها یا هفته‌ها به‌طول انجامد) کشاند. چنین محاصره‌ای را می‌توان از ترکیب روشهای مختلف و ایده‌های گوناگون، استفاده از محاسبات یا انباشتن تدریجی نتیجه‌ها ترتیب داد.

۶. برخی مباحث زیبای هندسهٔ مسطحه، که کاملاً برای دانش‌آموزان قابل فهم‌اند، در این فصل نیامده‌اند. تشابه وکاربردهای آن، چندضلعیهای محاطی و محیطی، نقاط جالب مثلث، رابطه‌های عددی و چیزهایی از این قبیل از این جمله‌اند. اینها را هم باید خواند، اما نمی‌توانستیم همهٔ آنها را در این فصل بیاوریم، زیرا تبدیل به فصلی حجیم وکسل‌کننده می‌شد. در عوض کوشیده‌ایم جنبه‌های اصلی این بازی و علم خاص را با آوردن نمونه‌هایی از مباحث مهمتر به اجمال مطرح کنیم. با وجود اینکه مطالب این فصل متنوع‌اند، معتقدیم که بسیار مهم است که به دانش‌آموزان یکپارچگی مطالب و راههایی راکه این حوزه‌های مختلف را به‌هم و دیگر شاخه‌های ریاضیات و علوم پیوند می‌دهند نشان دهیم.

فصل ۱۵

مبناهای عددی

۱. مبناها چه هستند؟

هر دانش‌آموزی می‌داند که «۲۶۵۳» یعنی عدد «دو هزار و شش‌صد و پنجاه و سه». از کجا می‌دانند؟ همه عادت داریم که عددها را به شکل زیر بنویسیم: رقم آخر تعداد یکانها در عدد مفروض است، یکی مانده به آخر تعداد دهگانهاست، دو تا مانده به آخر تعداد صدگانهاست، و همین‌طور تا آخر (هر چند که چنین چیزی تا حدی مبهم است، زیرا تعداد یکانها در ۲۶۵۳ است!). این دستگاه عددنویسی (و تعبیر رشتهٔ رقمها) را به اختصار مبنای عددی می‌نامند. بنابراین، وقتی می‌نویسیم «۲۶۵۳» منظورمان

$$\mathbf{۲} \times ۱۰۰۰ + \mathbf{۶} \times ۱۰۰ + \mathbf{۵} \times ۱۰ + \mathbf{۳} \times ۱$$

یا به اختصار

$$\mathbf{۲} \times ۱۰^{۳} + \mathbf{۶} \times ۱۰^{۲} + \mathbf{۵} \times ۱۰^{۱} + \mathbf{۳} \times ۱۰^{۰}$$

است. رقمهای این عدد را برای این سیاه نوشته‌ایم که تشخیص آنها از بقیهٔ عددها ساده‌تر باشد.

به‌سادگی معلوم می‌شود که عدد ده نقش ویژه‌ای در این نمایش دارد: هر عددی را می‌توان به شکل مجموع توانهایی از ده با ضریبهایی از میان عددهای ۰ تا ۹ نوشت. به همین دلیل است که این دستگاه را «اعشاری» می‌نامند. برای نوشتن عددها از ده نماد ویژه، یعنی ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹، به‌نام رقم، استفاده می‌کنیم. این رقمها عددهای از صفر تا ۹ را نشان می‌دهند. عدد بعدی، یعنی ده، یکان سطح بعدی است و با دو رقم نوشته می‌شود: ۱۰، که، با تسامح، یعنی «یک ضرب در ده را با صفر ضرب در یک جمع کنید».

خَب، اگر از عددی دیگر، مثلاً شش، استفاده کنیم، چه؟ مانند قبل، به شش نماد برای رقمها احتیاج داریم. می‌توانیم از شش نماد آشنای ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ استفاده کنیم، که عددهای از صفر تا

پنج را نمایش می‌دهند. عدد شش یکان سطح بعدی است، و در نتیجه با ۱۰ نمایش داده می‌شود. اگر به همین ترتیب ادامه دهیم، می‌توانیم هر عدد طبیعی را به شکل مجموع توانهای مختلف شش با ضریبهایی از ۰ تا ۵ نمایش دهیم. مثلاً (همهٔ عددها در دستگاه اعشاری نوشته شده‌اند):

$$۷ = ۱ \times ۶^{۱} + ۱ \times ۶^{۰}$$

$$۱۲ = ۲ \times ۶^{۱} + ۰ \times ۶^{۰}$$

$$۳۵ = ۵ \times ۶^{۱} + ۵ \times ۶^{۰}$$

$$۴۵ = ۱ \times ۶^{۲} + ۱ \times ۶^{۱} + ۳ \times ۶^{۰}$$

بنابراین، در دستگاه عددی جدید (که «مبنای شش» نامیده می‌شود) عدد ۷ را به شکل «۱۱»، عدد ۱۲ را به شکل «۲۰»، ۳۵ را به شکل «۵۵» و ۴۵ را به شکل «۱۱۳» می‌نویسیم.

به‌سادگی معلوم می‌شود که هر عدد طبیعی را می‌توان در مبنای شش نوشت. روش نوشتن ۴۵۰ را نشان می‌دهیم (در این مثال، مانند مثالهای قبل، همهٔ عددها، بجز آنهایی که در علامت نقل قول آمده‌اند، در دستگاه اعشاری‌اند).

بزرگترین توان شش که از ۴۵۰ بیشتر نیست ۲۱۶ است. اگر ۴۵۰ را بر ۲۱۶ تقسیم کنید خارج‌قسمت ۲ است (و باقی‌مانده ۱۸). بنابراین اولین رقم عدد ۴۵۰ در مبنای ۶ برابر با ۲ است. اکنون باقی‌مانده، یعنی ۱۸، را بر کوچکترین توان شش بعدی تقسیم می‌کنیم ـ در مرحلهٔ قبل بر $۶^{۳}$، یعنی ۲۱۶، تقسیم کردیم، اکنون بر $۶^{۲}$، یعنی ۳۶، تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت ۰ است، پس رقم دوم ۰ است. باقی‌ماندهٔ این تقسیم ۱۸ است و این باقی‌مانده را بر کوچکترین توان بعدی شش، یعنی بر $۶^{۱}$، یا ۶، تقسیم می‌کنیم. معلوم می‌شود که رقم بعدی ۳ است (باقی‌مانده ۰ است). بنابراین، آخرین رقم (خارج قسمت پس از تقسیم بر $۶^{۰}$، یا ۱، برابر با ۰ است. در نهایت، نمایش ۴۵۰ در مبنای شش «۲۰۳۰» است.

ضمن ساخت این دستگاه جدید، از هیچ ویژگی خاص ۶ استفاده نکردیم. به‌طور مشابه، می‌توانیم عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ مانند n انتخاب کنیم و دستگاهی عدد نویسی در مبنای n بسازیم، که در آن رقمهای هر عدد به نمایش آن به عنوان مجموع توانهای n مربوط‌اند. در این دستگاه، عدد n را مبنا می‌نامند. برای اینکه ابهام پیش نیاید، مبنای دستگاه را به‌عنوان زیرنویس (در نمایش اعشاری) در انتهای عدد می‌نویسیم. با استفاده از این نمادگذاری، می‌توانیم تساویهای قبلی را به‌شکل زیر بنویسیم:

$$۷_{۱۰} = ۱۱_{۶}, \quad ۱۲_{۱۰} = ۲۰_{۶}, \quad ۳۵_{۱۰} = ۵۵_{۶}, \quad ۴۵_{۱۰} = ۱۱۳_{۶}$$

تمرین ۱. برای نوشتن عددها در

الف) دستگاه دودویی (یعنی مبنای ۲)،

ب) دستگاه عددنویسی در مبنای n،

به چند رقم احتیاج داریم؟

برای نوشتن عددی در مبنای n باید آن را به شکل

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n^1 + a_0 n^0$$

نمایش دهیم، که در آن a_i مقداری از ۰ تا $n-1$ است و a_k برابر با صفر نیست (هر چند که محدودیت آخری لازم نیست).

تمرین ۲. نمایش اعشاری عددهای $۱۰۱۰۱_۲$، $۱۰۱۰۱_۳$، $۱۰۱۰۱_۴$، $۲۱۱_۴$، $۱۲۶_۷$ و $۱۵۸_{۱۱}$ را بنویسید.

تمرین ۳. عدد $۱۰۰_{۱۰}$ را در دستگاه‌های با مبنای ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ بنویسید.

تمرین ۴. در دستگاههایی با مبنای بزرگتر از ۱۰ به بیش از ده رقم احتیاج داریم، بنابراین باید رقمهایی را بسازیم. مثلاً، در دستگاه با مبنای ۱۱، می‌توانیم از «A» برای نمایش رقم «۱۰» استفاده کنیم. بنابراین، مثلاً، $۲۱_{۱۰}$ را می‌توان به شکل ۱A نوشت. با این قرارداد، عدد $۱۱۱_{۱۰}$ را در مبنای یازده بنویسید.

اکنون جمع کردن و ضرب کردن عددها در دستگاهی دلخواه را یاد می‌دهیم. می‌توانیم این کار را دقیقاً به همان روش دستگاه اعشاری انجام دهیم، اما باید به یاد داشته باشیم که هر بار مجموع رقمهای ستونی بیشتر از یا برابر با مبنای دستگاه مفروض شد، «انتقالی» داریم.

در زیر روش جمع کردن عددهای $۱۲۴_{۱۰}$ و $۴۱۷_{۱۰}$ را در مبنای ۳ آورده‌ایم. ابتدا این عددها را در مبنای ۳ می‌نویسیم: $۱۲۴_{۱۰} = ۱۱۱۲۱_۳$ و $۴۱۷_{۱۰} = ۱۲۰۱۱۰_۳$. سپس آنها را زیر هم طوری می‌نویسیم که آخرین رقم سمت راستشان زیر هم باشد. «انتقالیها» را در سطر بالا کوچکتر نوشته‌ایم.

		(۱)		(۱)	(۱)	
		۱	۱	۱	۲	۱
+	۱	۲	۰	۱	۱	۰
	۲	۰	۲	۰	۰	۱

برای اینکه این عملیات را با موفقیت انجام دهیم باید جدولهای جمع و ضرب عددهای کمتر از مبنای دستگاه، یعنی عددهای یک رقمی، را بدانیم. در مورد دستگاه اعشاری، این کار را زود و خوب یاد گرفته‌ایم.

تمرین ۵. این جدولها را برای دستگاههای با مبنای ۲، ۳، ۴ و ۵ بنویسید.

تمرین ۶. حساب کنید:

الف) $۱۱۰۱_۲ + ۱۱۰۰_۲$،

ب) $۲۰۱_۳ \times ۱۰۲_۳$

توصیه به معلمان. در اینجا جمع کردن و ضرب کردن عددها در دستگاهها را به اختصار توضیح داده‌ایم. در جلسه‌ای واقعی این کار بیش از اینها طول می‌کشد. البته، هدف اصلی این کار سریع و دقیق

نوشتن محاسبات در دستگاهی دیگر نیست. بررسی چند نمونه و انجام چند تمرین دربارهٔ الگوریتمهای جمع کردن و ضرب کردن در دستگاهی غیر از مبنای ۱۰ منجر به فهم دقیقتر این الگوریتمها می‌شود.

اکنون الگوریتمی کارآمد برای تبدیل عددها از یک دستگاه عددی به دستگاهی دیگر را شرح می‌دهیم. این الگوریتمها با الگوریتمی که قبلاً می‌شناختیم فرق دارد، زیرا در اینجا نمایش عددها رقم به رقم از راست به چپ است، نه از چپ به راست. رقم آخر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد موردنظر در تقسیم بر مبنای دستگاه جدید است. رقم دوم را می‌توان این‌طور پیدا کرد: خارج‌قسمت در محاسبهٔ قبلی را درنظر می‌گیریم و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن را در تقسیم بر مبنای دستگاه جدید پیدا می‌کنیم. سپس دقیقاً همین کار را تکرار می‌کنیم تا نمایش را کامل کنیم.

مثال. عدد $۲۵۰_{۱۰}$ را در دستگاه با مبنای ۸ («هشت‌تایی») می‌نویسیم:

$$۲۵۰ = ۳۱ \times ۸ + ۲$$

$$۳۱ = ۳ \times ۸ + ۷$$

$$۳ = ۰ \times ۸ + ۳$$

بنابراین، $۲۵۰_{۱۰} = ۳۷۲_{۸}$.

تمرین ۷. عددهای

الف) $۱۰۰۰_{۱۰}$

ب) $۵۳۲_{۸}$

را در دستگاه به مبنای ۷ بنویسید.

در انتها چند مسألهٔ جالب می‌آوریم.

مسألهٔ ۱. معلم روی تخته می‌بیند که $۱۰ = ۴ \times ۳$. هنگام پاک کردن تخته با خودش گفت که شاید این تساوی در دستگاه دیگری نوشته شده باشد. آیا ممکن است چنین چیزی درست باشد؟

مسألهٔ ۲. آیا دستگاهی وجود دارد که تساویهای زیر همزمان درست باشند؟

الف) $۱۰ = ۴ + ۳$ و $۱۵ = ۴ \times ۳$،

ب) $۵ = ۳ + ۲$ و $۱۱ = ۳ \times ۲$.

مسألهٔ ۳. شرایطی را (در مورد نمایش عددها) پیدا کنید که

الف) در دستگاه با مبنای ۳،

ب) در دستگاه با مبنای n،

بتوان تشخیص داد عددی زوج است یا فرد.

مسألهٔ ۴. روی تخته‌سیاه نوشته شده:

```
    ۲ ۳ ؟ ۵ ؟
  + ۱ ؟ ۶ ۴ ۲
  ___________
    ۴ ۲ ۴ ۲ ۳
```

دستگاهی را که این محاسبات در آن انجام شده و نیز جمعوندها را پیدا کنید.

مسألهٔ ۵. مربی‌ای می‌گوید که تیمش ۱۰۰ عضو دارد که ۲۴ نفر کلاس اولی‌اند و ۳۲ نفر کلاس دومی. مربی در گفته‌اش از چه دستگاهی استفاده کرده است؟

توصیه به معلمان. مطالب این بخش را می‌توان در دو یا سه جلسهٔ متوالی خواند. دانش‌آموزان باید

- مفهوم دستگاه عددی،
- تبدیل عددها از دستگاهی به دستگاهی دیگر،
- جمع کردن و ضرب کردن در دستگاهی دلخواه،

را یاد بگیرند. توصیه می‌کنیم برای اینکه این مطالب نسبتاً غامض را جذابتر کنید از مسأله‌هایی شبیه مسألهٔ ۱ ـ ۵ در بالا استفاده کنید.

۲. قاعده‌های بخش‌پذیری

در بخش قبل جمع کردن و ضرب کردن عددها در دستگاهی دلخواه را یاد گرفتیم. عملیات معکوس ـ یعنی تفریق و تقسیم، به همان روش دستگاه اعشاری انجام می‌شوند. البته، این عملیات (مثلاً، مانند «تقسیم معمولی»)، حتی در دستگاه اعشاری، کمی دشوارترند.

بنابراین، بهتر است از آزمونهایی برای تشخیص اینکه آیا عددی بر عددی دیگر بخش‌پذیر است، بی‌آنکه تقسیم کنیم، استفاده کنیم. در مورد دستگاه اعشاری، این آزمونها را در فصل «بخش‌پذیری ـ ۲» بررسی کردیم. در مورد دستگاههای غیراعشاری وضعیت دشوارتر است ـ مثلاً، سعی کنید مشخص کنید که آیا $۱۲۳۴۵۶۶۵۴۳۲۱_۷$ بر ۶ بخش‌پذیر است یا خیر.

کار را شروع می‌کنیم. چگونه فهمیدیم عددی که رقم آخرش برابر با صفر است بر ۱۰ بخش‌پذیر است؟ موضوع این است که در نمایش اعشاری هر عدد مانند

$$a_k ۱۰^k + a_{k-۱} ۱۰^{k-۱} + \cdots + a_۲ ۱۰^۲ + a_۱ ۱۰^۱ + a_۰ ۱۰^۰$$

همهٔ جمعوندها، بجز احتمالاً آخری، بر ۱۰ بخش‌پذیرند. البته، در حالت موردنظر ما، جمعوند آخر صفر است و در نتیجه کل مجموع بر ۱۰ بخش‌پذیر است. حکم عکس را هم به همین روش می‌توانیم ثابت کنیم: اگر عددی طبیعی بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد، رقم آخرش صفر است.

اکنون دستگاهی دلخواه را در نظر بگیرید. به همین روش می‌توانیم آزمون بخش‌پذیری زیر را ثابت کنیم: در دستگاه با مبنای n وقتی و فقط وقتی نمایش عددی به صفر ختم می‌شود که این عدد بر n بخش‌پذیر باشد.

مسألهٔ ۶. آزمون بخش‌پذیری بر

الف) توانی از مبنای دستگاه (مانند آزمونهای بخش‌پذیری بر ۱۰۰، ۱۰۰۰، ... در دستگاه اعشاری)،

ب) مقسوم‌علیهی از مبنای دستگاه (مانند آزمونهای بخش‌پذیری بر ۲ و ۵)،

ج) توانی از مقسوم‌علیهی از مبنای دستگاه،

را بیان و آن را ثابت کنید.

یادداشت. می‌خواهیم بار دیگر تأکید کنیم که دستگاههای مختلف فقط راههای مختلف نوشتن عددها هستند. بنابراین، بخش‌پذیری عددی بر عددی دیگر به دستگاه خاصی که در آن نوشته شده‌اند بستگی ندارد.

در عین حال، در هر دستگاه شگردهایی برای تعیین بخش‌پذیری بر برخی عددها وجود دارند. این شگردها همان آزمونهای بخش‌پذیری‌اند.

اکنون آزمونهای بخش‌پذیری دیگری را بررسی می‌کنیم. شاید معروفترین اینها آزمونهای بخش‌پذیری بر ۳ و ۹ باشند. سعی می‌کنیم که این آزمونها را به دستگاههای عددی دیگر تعمیم دهیم. ابتدا، باید اثبات این آزمون در دستگاه اعشاری را خوب بفهمیم (فصل «بخش‌پذیری و باقی‌مانده‌ها» را ببینید). تنها مطلب مهم این است که ۹ = ۱ − ۱۰ و در نتیجه (به‌پیمانهٔ ۹)۱ ≡ ۱۰.

آزمونی مشابه را برای بخش‌پذیری بر $n-1$ در دستگاه با مبنای n بیان و ثابت می‌کنیم. در حقیقت، (به‌پیمانهٔ $n-1$)$1 \equiv n$. بنابراین، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند s،

$$n^s \equiv 1 \quad (\text{به‌پیمانهٔ } n-1)$$

به این ترتیب

$$a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n^1 + a_0 n^0 \equiv a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0 \quad (\text{به‌پیمانهٔ } n-1)$$

بنابراین وقتی و فقط وقتی مجموع رقمهای عددی در مبنای n بر $n-1$ بخش‌پذیر است که خود این عدد بر $n-1$ بخش‌پذیر باشد.

سؤالی را که در ابتدای این بخش مطرح کردیم به یاد بیاورید: آیا $۱۲۳۴۵۶۶۵۴۳۲۱_۷$ بر ۶ بخش‌پذیر است؟ اکنون می‌توانیم به‌سادگی به این سؤال پاسخ دهیم: چون مجموع رقمها (که برابر با $۴۲_{۱۰}$ است) بر ۶ بخش‌پذیر است، خود این عدد هم بر ۶ بخش‌پذیر است.

مسألهٔ ۷. آزمون بخش‌پذیری بر

الف) مقسوم‌علیهی از عدد $n - ۱$ در دستگاه با مبنای n (مانند آزمون بخش‌پذیری بر ۳ در دستگاه اعشاری)،

ب) عدد $n + ۱$ در دستگاه با مبنای n (مانند آزمون بخش‌پذیری بر ۱۱)،

ج) مقسوم‌علیهی از عدد $n + ۱$ در دستگاه با مبنای n (آزمون مشابهی در مبنای ۱۰ وجود ندارد)،

را بیان و آن را ثابت کنید.

توصیه به معلمان. توصیه می‌کنیم که جلسه‌ای کامل را به موضوع این بخش اختصاص دهید. اگر در خلال این جلسه دانش‌آموزان (با راهنماییهای معلم) بتوانند آزمونهای بخش‌پذیری جدیدی را بیان و ثابت کنند خیلی عالی است.

۳. مسأله‌های گوناگون

تا اینجا به خود دستگاههای عددی علاقه‌مند بودیم. اکنون چند مسأله را بررسی می‌کنیم که به‌نظر می‌رسد ربطی به دستگاههای عددی ندارند. البته، ضمن حل کردن این مسأله‌ها دستگاههای غیراعشاری به‌طور کاملاً طبیعی ظاهر می‌شوند.

مسألهٔ ۸. کمترین تعداد وزنه‌ها که با آنها بتوانیم هر مقداری از طلا را که وزنش بر حسب گرم عددی طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ است با ترازوی دوکفه‌ای معمولی وزن کنیم چندتاست؟ وزنه‌ها را فقط می‌توان در کفهٔ سمت چپ ترازو قرار داد.

راه‌حل. هر عدد طبیعی را می‌توان در دستگاه دودویی نوشت. بنابراین، برای اینکه هر مقداری از طلا را که وزنش برحسب گرم عددی طبیعی از ۱ تا ۱۰۰ گرم است وزن کنیم، کافی است هفت وزنه داشته باشیم: ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲ و ۶۴ گرمی. از طرف دیگر، شش وزنه کافی نیست، زیرا با آنها حداکثر $۲^۶ - ۱$ یا ۶۳ وزن مختلف را می‌توانیم به‌دست بیاوریم (هر وزنه را یا روی کفهٔ سمت چپ می‌گذاریم یا نمی‌گذاریم).

توجه. توجه کنید که فرض نکرده‌ایم وزن وزنه‌ها باید عددی طبیعی باشد. این فرض راه‌حل را ساده‌تر نمی‌کند.

مسألهٔ ۹ *. به همان سؤال مسألهٔ قبل پاسخ دهید، منتها این بار می‌توانیم وزنه‌ها را روی هر یک از کفه‌های ترازو قرار دهیم.

راه‌حل. برای توضیح راه‌حل این مسأله به‌ویژگی جالب دستگاه با مبنای ۳ احتیاج داریم:

هر عدد طبیعی را می‌توان به‌شکل تفاضل دو عدد نوشت که در نمایش آنها در مبنای ۳ فقط ۰ و ۱ وجود دارد.

می‌توانیم این ویژگی را با نوشتن عدد اصلی در مبنای ۳ و ساختن عددهای موردنظر، رقم به رقم از راست به چپ، ثابت کنیم. این کار تمرین خوبی است و آن را برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

اکنون معلوم است که کافی است پنج وزنه داشته باشیم که وزنه‌های ۱، ۳، ۹، ۲۷ و ۸۱ گرمی‌اند (می‌دانید که چرا به وزنهٔ ۲۴۳ گرمی احتیاج نداریم؟).

چهار وزنه هم کافی نیست، زیرا نمی‌توانیم با آنها بیش از $۳^۴ - ۱$ یا ۸۰ وزن مختلف را وزن کنیم (هر وزنه را یا روی کفهٔ سمت چپ می‌گذاریم یا روی کفهٔ سمت راست یا اصلاً آن را روی ترازو نمی‌گذاریم).

مسألهٔ ۱۰. پادشاه فاسد سه عدد دو رقمی سرّی a، b و c را انتخاب کرده است. شاهزاده باید سه عدد مانند X، Y و Z را نام ببرد، که پس از آن پادشاه مجموع $aX + bY + cZ$ را به او می‌گوید. سپس شاهزاده باید هر سه عدد پادشاه را بگوید، در غیر این صورت اعدام می‌شود. به او کمک کنید که از این وضعیت خطرناک رهایی یابد.

راه‌حل. شاهزاده می‌تواند عددهای ۱، ۱۰۰ و $۱۰۰^۲$ را بگوید. در این صورت عددهای a، b و c همان رقمهای مجموع $aX + bY + cZ$ در دستگاه با مبنای ۱۰۰اند.

مسألهٔ ۱۱ *. ثابت کنید می‌توان از مجموعهٔ ۰، ۱، ۲، . . . و $۳^{k-۱}$، ۲^k عدد طوری انتخاب کرد که هیچ‌یک از آنها میانگین هیچ دوتایی از عددهای انتخاب شده نباشد.

راه‌حل. از دستگاه با مبنای ۳ استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که نمایش هر یک از عددهای مفروض در مبنای ۳، k رقم داشته باشد ـ اگر کمتر از k رقم وجود داشت بقیهٔ جاها را با صفر پر می‌کنیم. اکنون عددهایی را انتخاب می‌کنیم که در نمایش آنها در مبنای ۳ فقط ۰ و ۱ وجود دارد. دقیقاً ۲^k عدد با این ویژگی وجود دارد. ثابت می‌کنیم که می‌توان این عددها را زیرمجموعهٔ موردنظر به‌حساب آورد. فرض کنید سه عدد در این زیرمجموعه مانند x، y و z وجود داشته باشند که $x + y = ۲z$. چون عددهای x و y باید دست‌کم در یک رقم فرق داشته باشند، می‌توانیم رقمی با این ویژگی پیدا کنیم که سمت راست بقیه باشد. در این صورت، رقم متناظر در مجموع $x + y$ باید ۱ باشد. اما در نمایش $۲z$ در مبنای ۳ فقط ۰ و ۲ وجود دارد. این هم تناقض است.

مسألهٔ ۱۲. ثابت کنید می‌توان ۲^k عدد با همین ویژگی از میان عددهای ۰، ۱، ۲، . . . و $\frac{۳^k - ۱}{۲}$ انتخاب کرد.

توصیه به معلمان. مسأله‌های این بخش را می‌توان در جلسات یا مسابقه‌های ریاضی گوناگون داد.

۴. بازی نیم

در اینجا دربارهٔ یکی از گونه‌های بازی معروف نیم صحبت می‌کنیم. قوانین این بازی ساده‌اند. سه کپه خرده‌سنگ داریم (ممکن است در ابتدا تعداد خرده‌سنگهای کپه‌ها فرق داشته باشد). دو بازیکن به نوبت در هر حرکت چند خرده‌سنگ از کپه‌ها برمی‌دارند. در هر حرکت می‌توان هر تعداد دلخواهی خرده‌سنگ برداشت منتها باید فقط از یک کپه خرده‌سنگ برداشت. بازیکنی که آخرین خرده‌سنگ را بردارد بازی را می‌برد.

خیلی جالب است که می‌توان استراتژی برد در این بازی را با استفاده از دستگاه دودویی طراحی کرد. این استراتژی را در حالت کلیتری، یعنی وقتی که تعداد کپه‌ها دلخواه است، بررسی می‌کنیم. همچنین، خاطرنشان می‌کنیم که در حالتی که دو کپه داریم، این بازی همان بازی با رخ (شطرنج) روی صفحه‌ای مستطیلی است (مسأله‌های ۱۰، ۱۶ و ۲۲ در فصل «بازیها» را ببینید).

چون همیشه، برای «تحلیل» کردن بازی کافی است که مجموعهٔ موقعیتهای برد را مشخص کنیم (بخش ۳ فصل «بازیها» را ببینید). نمایش دودویی تعداد خرده‌سنگهای کپه‌ها را یکی‌یکی زیر هم طوری می‌نویسیم که رقمهای یکان زیر هم باشند، رقمهای دهگان زیر هم باشند، و همین‌طور تا آخر. بعد زوجیت تعداد ۱ ها را در هر ستون مشخص می‌کنیم (ز یعنی «زوج» و ف یعنی «فرد»). مثلاً، فرض کنید سه کپه با ۱۰۱، ۶۰ و ۴۷ خرده‌سنگ داریم. در این صورت، می‌نویسیم

n_1	=	۱۰۱	=	۱	۱	۰	۰	۱	۰	۱
n_2	=	۶۰	=		۱	۱	۱	۱	۰	۰
n_3	=	۴۷	=		۱	۰	۱	۱	۱	۱

۱	۱	۰	۰	۱	۰	۱
	۱	۱	۱	۱	۰	۰
	۱	۰	۱	۱	۱	۱
ف	ف	ف	ز	ف	ف	ز

ادعا می‌کنیم که موقعیت برد وقتی و فقط وقتی است که تعداد ۱ ها در هر ستون عددی زوج باشد؛ یعنی، همهٔ حروف در سطر پایین ز باشند (در نتیجه، موقعیت بالا، قاعدتاً، موقعیت باخت است). چنین موقعیتی را «زوج» و موقعیت دیگر را «فرد» می‌نامیم.

برای اینکه ثابت کنیم موقعیت برد وقتی و فقط وقتی است که موقعیت زوج باشد، باید ثابت کنیم

۱. موقعیت آخر بازی زوج است.

۲. هر حرکت از موقعیتی زوج منجر به موقعیتی فرد می‌شود.

۳. از هر موقعیت فرد می‌توان با یک حرکت به موقعیتی زوج رسید.

قسمت (۱) ساده است. بازی وقتی به پایان می‌رسد که هیچ خرده‌سنگی در هیچ کپه‌ای نمانده باشد، و صفر زوج است.

برای اثبات قسمت (۲) توجه کنید که پس از هر حرکت تعداد خرده‌سنگها در کپه‌ای تغییر می‌کند و در نتیجه، رقمی در نمایش دودویی آن عوض می‌شود. یعنی اینکه تعداد ۱های ستون متناظرش یکی تغییر می‌کند. چون هیچ ستون دیگری تغییر نمی‌کند (هر بار خرده‌سنگها فقط از یک کپه برداشته می‌شوند)، زوجیت این ستون هم تغییر می‌کند.

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه از موقعیتی فرد به موقعیتی زوج برویم. باید چند خرده‌سنگ از یک کپه طوری برداریم که زوجیت تعداد ۱ها در ستونها در همهٔ ستونهایی که تعداد فردی ۱ دارند (و فقط در همین ستونها!) تغییر کند. آخرین ستون سمت چپ را که تعداد فردی ۱ دارد در نظر بگیرید و کپه‌ای را انتخاب کنید که رقمش در این ستون ۱ است (چرا چنین کپه‌ای وجود دارد؟). این کپه همانی است که باید خرده‌سنگها را از آن برداریم.

به‌سادگی می‌توان فهمید که چند تا خرده‌سنگ باید از این کپه برداشت ـ نمایش دودویی تعداد خرده‌سنگهای این کپه باید در رقمهایی تغییر کند که نظیر ستونهایی‌اند که تعداد ۱ها در آنها عددی فرد است. باید آنقدر خرده‌سنگ برداریم تا این وضع پیش بیاید. چون آخرین رقم از سمت چپ در میان این رقمها از ۱ به ۰ تغییر می‌کند، تعداد خرده‌سنگها در این کپه، در حقیقت، کم می‌شود.

مسألهٔ ۱۳. بازیهای زیر را تحلیل کنید.

الف) در سطر اول صفحهٔ شطرنجی هشت سرباز سفید و در سطر هشتم این صفحه هشت سرباز سیاه قرار دارد. هر یک از دو بازیکن، در نوبتش، می‌تواند یکی از سربازهایش را هر تعداد خانه که بخواهد به سمت انتهای دیگر صفحه و در جهت عمودی حرکت دهد. نمی‌توان از روی سربازی به رنگ دیگر پرید. بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد.

ب) همین بازی، منتها سربازها هم می‌توانند به‌جلو بروند هم می‌توانند به عقب برگردند.

توصیه به معلمان. بهتر است که بازی نیم را فقط با دانش‌آموزانی که مهارت ریاضی کافی دارند بررسی کنید. دانش‌آموزان باید با هم بازی کنند و حدسها و استراتژیهایشان را مطرح کنند. یافتن استراتژی برد نسبتاً دشوار است؛ البته، راهنماییهای درست و به‌موقع، رسیدن به این استراتژی را ساده‌تر می‌کنند و دانش‌آموزان فرصت می‌یابند که خودشان تا جایی که می‌توانند قسمتهای بیشتری از این مسأله را حل کنند.

فصل ۱۶

نابرابریها

۱. کدام بزرگتر است؟

احتمالاً، این سؤال از سؤالهای تقریباً همیشگی کودکان است. کودکان بسیار کنجکاوند و معمولاً سؤالهایی از این قبیل می‌پرسند:

- چه کسی قویتر است: بابام یا قهرمان کشتی؟
- کدام بلندتر است: خانهٔ ما یا برج میلاد؟
- جمعیت تهران بیشتر از اصفهان است؟

در ریاضیات، این سؤالهای «بچه‌گانه» خیلی معقول نیست، اما این سؤالها به دانش‌آموزان کمک می‌کنند که چگونه بهتر و دقیقتر محاسبه کنند و با عددهای «واقعاً بزرگ» کار کنند. البته، دربارهٔ استفاده از ماشین حساب، که اگر بخواهیم در اثباتها خیلی سختگیری کنیم کمکی نمی‌کنند، صحبت نمی‌کنیم.

توصیه به معلمان. محاسبه و تخمین از ارزشمندترین جنبه‌های فرهنگ ریاضی است. دانش‌آموزان نباید فقط «کورکورانه» از روشهای مختلف محاسبه و تخمین استفاده کنند؛ باید ماهیت آنها را درک کنند. نمی‌توان تمام شگردهای تکنیکی ریاضیات را به‌خاطر سپرد. اما می‌توان و باید به دانش‌آموزان یاد داد چگونه «با دست خالی» از پس کارها برآیند. مهارت یافتن در سریع و دقیق تخمین زدن با حل کردن مسأله‌هایی عددی، مانند آنهایی که در این فصل آورده‌ایم، مقدور می‌شود.

مسأله‌ای از این دست مسألهٔ زیر است.

مسألهٔ ۱. کدام عدد بزرگتر است: 31^{11} یا 17^{14}؟

قطعاً، می‌توانید این عددها را «با دست» حساب کنید ـ این عددها بیشتر از ۲۰ رقم ندارند. با این حال، این روش برخورد با این مسأله وقتگیر است و در مورد مسأله‌های دشوارتر به درد نمی‌خورد. از راهی دیگر می‌رویم:

$$۳۱^{۱۱} < ۳۲^{۱۱} = (۲^۵)^{۱۱} = ۲^{۵۵} < ۲^{۵۶} = (۲^۴)^{۱۴} = ۱۶^{۱۴} < ۱۷^{۱۴}$$

از این نابرابریهای زنجیری معلوم می‌شود که $۳۱^{۱۱}$ از $۱۷^{۱۴}$ کوچکتر است. تنها چیزی که برای یافتن راه‌حل احتیاج داشتیم این بود که توجه کنیم ۳۱ و ۱۷ از توانهای ۲ دور نیستند.

مسألهٔ ۲. کدام عدد بزرگتر است:

الف) $۲^{۳۰۰}$ یا $۳^{۲۰۰}$؟

ب) $۲^{۴۰}$ یا $۳^{۲۸}$؟

ج) $۵^{۴۴}$ یا $۴^{۵۳}$؟

مسألهٔ ۳. ثابت کنید $۴^{۱۰۰} > ۳^{۱۰۰} + ۲^{۱۰۰}$.

راه‌حل. معلوم است که $۳^{۱۰۰} > ۲^{۱۰۰}$. بنابراین کافی است ثابت کنیم $۴^{۱۰۰} > ۳^{۱۰۰} \times ۲$، یا معادل آن، $\left(\frac{۴}{۳}\right)^{۱۰۰} > ۲$. اما

$$\left(\frac{۴}{۳}\right)^۳ = \frac{۶۴}{۲۷}$$

پس حتی $\left(\frac{۴}{۳}\right)^۳$ هم از ۲ بزرگتر است.

مسألهٔ ۴. کدام عدد بزرگتر است: $۷^{۹۲}$ یا $۸^{۹۱}$؟

برای بررسی بیشتر وضعیت مسألهٔ ۳، سعی می‌کنیم عددی طبیعی مانند n پیدا کنیم که $۴^n < ۲^{۱۰۰} + ۳^{۱۰۰} < ۴^{n+۱}$. در مسیر یافتن راه‌حل این مسأله به مسألهٔ زیر می‌رسیم.

مسألهٔ ۵*. ثابت کنید $۴^{۸۰} > ۳^{۱۰۰} + ۲^{۱۰۰} > ۴^{۷۹}$.

راه‌حل. چون $۳^{۱۰۰} + ۲^{۱۰۰} < ۳^{۱۰۰} \times ۲$، کافی است ثابت کنیم $۳^{۱۰۰} \times ۲ < ۴^{۸۰}$؛ یعنی،

$$\left(\frac{۴^۴}{۳^۵}\right)^{۲۰} = \left(\frac{۲۵۶}{۲۴۳}\right)^{۲۰} > ۲$$

نابرابری برنولی را به‌یاد آورید: اگر $x \geqslant -۱$ و $n \geqslant ۱$، $(۱ + x)^n \geqslant ۱ + nx$ (مسألهٔ ۵۵ یا فصل «استقرا» را ببینید). با این وضع این سؤال پیش می‌آید: آیا درست است که $۱ + \frac{۱}{۲۰} < \frac{۲۵۶}{۲۴۳}$؟

جواب مثبت است (خودتان این موضوع را تحقیق کنید!). بنابراین

$$\left(\frac{256}{243}\right)^{20} > \left(1+\frac{1}{20}\right)^{20} \geqslant 2$$

اکنون ثابت می‌کنیم $4^{79} < 3^{100} + 2^{100}$. ثابت می‌کنیم $4^{79} < 3^{100}$، یا $4 > \frac{4^{80}}{3^{100}}$. در حقیقت،

$$\frac{4^{80}}{3^{100}} = \left(\frac{256}{243}\right)^{20} < \left(\frac{19}{18}\right)^{20} = \left(\frac{361}{324}\right)^{10}$$
$$< \left(\frac{9}{8}\right)^{10} = \left(\frac{81}{64}\right)^{5} < \left(\frac{9}{7}\right)^{5} = \frac{59049}{16807} < 4$$

توضیح. همین‌طور که می‌بینید، روش راه‌حل، ساده کردن تدریجی عبارت بدترکیب و پیچیدهٔ $\frac{4^{80}}{3^{100}}$ است.

توصیه به معلمان. برای اینکه این روش را خوب آموزش دهید، لازم است دانش‌آموزان توانهای کوچک عددهای طبیعی مختلفی را از حفظ بدانند. همچنین، دانش‌آموزان نباید از محاسبات (هرچند طولانی)، تا حدی که می‌دانند چه می‌کنند، ابایی داشته باشند. حل کردن مسأله‌هایی شبیه به مسألهٔ بعد به این امر کمک می‌کند.

مسألهٔ ۶. همهٔ توانهای عددهای طبیعی ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۱ و ۱۲ را که از ۱۰۰۰۰ بزرگتر نیستند پیدا کنید و آنها را به‌ترتیب صعودی مرتب کنید. همهٔ زوجهایی از این توانها را پیدا کنید که اختلافشان از ۱۰ بیشتر نیست.

توضیح. این مسأله برای تمرین در منزل، با استفاده از ماشین‌حساب عالی است.

ایدهٔ راه‌حل سه مسألهٔ بعد کاملاً متفاوت است. تا اینجا نابرابریهایی در مورد عددهایی طبیعی را با تبدیل کردن (ساده کردن) آنها و محاسبهٔ تبدیلها ثابت کرده‌ایم. ایدهٔ جدید تبدیل برخی عددها به متغیر است.

مسألهٔ ۷. کدام عدد بزرگتر است: 1234569×1234567 یا 1234568^2؟

راه‌حل. عدد ۱۲۳۴۵۶۸ را با x نشان می‌دهیم. در این صورت عبارت سمت چپ برابر است با

$$(x-1)(x+1) = x^2 - 1 < x^2$$

بنابراین لازم نیست عددهای هفت‌رقمی را در هم ضرب کنیم یا آنها را به‌توان برسانیم.

مسألهٔ ۸. دو کسر

$$\frac{۱۰\ldots۰۱}{۱۰\ldots۰۰۱},\qquad \frac{۱۰\ldots۰۱}{۱۰\ldots۰۰۱}$$

در دست‌اند. در هرکسر عدد مخرج یک صفر از عدد صورت بیشتر دارد. اگر صورت کسر سمت چپ ۱۹۸۴ صفر و صورت کسر سمت راست ۱۹۸۵ صفر داشته باشد، کدام یک از آنها بزرگتر است؟

مسألهٔ ۹. کدام عدد بزرگتر است: $\frac{۱۲۳۴۵۶۷}{۷۶۵۴۳۲۱}$ یا $\frac{۱۲۳۴۵۶۸}{۷۶۵۴۳۲۲}$؟

در اینجا چند مسألهٔ دیگر با استفاده از تخمین و تقریب می‌آوریم.

مسألهٔ ۱۰. کدام عدد بزرگتر است: $۱۰۰^{۱۰۰}$ یا $۱۵۰^{۵۰} \times ۵۰^{۵۰}$؟

مسألهٔ ۱۱. کدام عدد بزرگتر است: $(۱/۰۱)^{۱۰۰۰}$ یا ۱۰۰۰؟

مسألهٔ ۱۲. ثابت کنید

$$\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-\cdots-\frac{۱}{۹۹}+\frac{۱}{۱۰۰}>\frac{۱}{۵}$$

مسألهٔ ۱۳. (این مسأله تقریباً مسخره است.) اگر تابع فاکتوریل را ۹۹ بار بر عدد ۱۰۰ اثر دهید به عدد A می‌رسید. اگر تابع فاکتوریل را ۱۰۰ بار بر عدد ۹۹ اثر دهید به عدد B می‌رسید. کدام‌یک از این عددها بزرگتر است؟

راه‌حل مسألهٔ ۱۲ را بررسی می‌کنیم. جمعوندها را دوتادوتا دسته‌بندی می‌کنیم:

$$\left(\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}\right)+\left(\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵}\right)+\cdots+\left(\frac{۱}{۹۸}-\frac{۱}{۹۹}\right)+\frac{۱}{۱۰۰}$$

اکنون مجموعی از عددهای مثبت داریم که این‌طور شروع می‌شود:

$$\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۴۲}+\cdots$$

چون $\frac{۱}{۵}<\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۶}$، بلافاصله نتیجهٔ موردنظر به‌دست می‌آید.

گوناگون

۱۴. عدد $۲^{۱۰۰۰}$ چند رقم دارد؟

۱۵. بزرگترین عدد در میان عددهای $۵^{۱۰۰}$، $۶^{۹۱}$، $۷^{۹۰}$ و $۸^{۸۵}$ را پیدا کنید.

*۱۶. ثابت کنید عدد

$$\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۵}{۶}\times\cdots\times\frac{۹۹}{۱۰۰}$$

الف) از $\frac{۱}{۱۰}$ کوچکتر است.

ب) از $\frac{۱}{۱۲}$ کوچکتر است.

ج) از $\frac{۱}{۱۵}$ بزرگتر است.

توصیه به معلمان. می‌توانیم سؤالهای زیادی شبیه مسأله‌های ۱۰—۱ طرح کنیم. مثلاً، دو عدد طبیعی کوچک ـ مثلاً ۵ و ۷ ـ را درنظر می‌گیریم. سپس توانی بزرگ از ۵ ـ مثلاً $۵^{۷۳}$ ـ را در نظر می‌گیریم. اکنون دو توان نسبتاً کوچک ۵ و ۷ را در نظر بگیرید که تفاضلشان «خیلی زیاد نیست» (این کار بستگی به برداشت شما از مفهوم اندازه دارد). مثلاً، $۵^{۴}$ و $۷^{۳}$ خوب‌اند، زیرا $۶۲۵ = ۵^{۴}$ و $۳۴۳ = ۷^{۳}$ (نماها باید متفاوت باشند!) چون $۷^{۳} < ۵^{۴}$، پس $۷^{۵۴} < ۵^{۷۲}$. بنابراین $۷^{۵۴} < ۵^{۷۲} < ۵^{۷۳}$. سپس، می‌توانیم ۵۴ در نما را کمی «درست کنیم» و تمرین دیگری به‌دست آوریم: ثابت کنید: $۷^{۵۳} < ۵^{۷۳}$.

توضیح. این رده از نابرابریها، که نتیجهٔ ترکیب چند نابرابری ساده و «سردستی»اند، در فرهنگ المپیاد روسیه نامی خاص دارند. اینها را «نابرابریهای لنینگرادی» می‌نامند.

توصیه به معلمان. حل‌کردن نابرابریهای عددی به گسترش مهارتهای محاسباتی و روشهای تقریب‌زدن کمک شایانی می‌کند. البته ممکن است که برخی دانش‌آموزان، که در ریاضیات منطقی و ترکیبیات مستعدند، به مسأله‌های محاسباتی نظیر اینها «حساسیت» داشته باشند.

۲. نابرابری اصلی

نابرابری اصلی (و به تعبیری تنها نابرابری) در حوزهٔ عددهای حقیقی نابرابری $x^{۲} \geqslant ۰$ است ـ که در درستی‌اش شکی نیست. بقیهٔ نابرابریهای معروف و به‌درد بخور از این نابرابری به‌دست می‌آیند. در میان آنها، نابرابری میانگینها (یا نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی)، قطعاً، اولین است: اگر $a, b \geqslant ۰$،

$$\frac{a+b}{۲} \geqslant \sqrt{ab}$$

عددهای $\frac{a+b}{۲}$ و $\sqrt{ab}$ را به ترتیب میانگین حسابی و میانگین هندسی عددهای a و b می‌نامند.

به‌سادگی می‌توان این نابرابری را ثابت کرد:

$$\frac{a+b}{۲} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-۲\sqrt{ab}}{۲} = \frac{۱}{۲}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{۲} \geqslant ۰$$

که هم درستی نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی را نتیجه می‌دهد، هم اینکه در این نابرابری وقتی و فقط وقتی تساوی پیش می‌آید که $a = b$.

مسألهٔ ۱۷. ثابت کنید، اگر $x \geqslant ۰$، $۱ + x \geqslant ۲\sqrt{x}$.

مسألهٔ ۱۸. ثابت کنید، اگر $x > ۰$، $x + \frac{۱}{x} \geqslant ۲$.

مسألهٔ ۱۹. ثابت کنید به‌ازای هر x و y، $\frac{x^۲ + y^۲}{۲} \geqslant xy$.

مسألهٔ ۲۰. ثابت کنید به‌ازای هر x و y، $۲(x^۲ + y^۲) \geqslant (x+y)^۲$.

مسألهٔ ۲۱. ثابت کنید اگر $x > ۰$ و $y > ۰$، $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} \geqslant \frac{۴}{x+y}$.

راه‌حل مسألهٔ ۱۸. $(x + \frac{۱}{x}) - ۲ = \left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{۱}{x}}\right)^۲ \geqslant ۰$.

یادداشت. به‌طورکلی، راه‌حل هر یک از این مسأله‌ها را می‌توان یا با استفادهٔ مناسب از نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی یا تبدیلهای «مناسبی» که منجر به استفاده از نابرابری اصلی، $x^۲ \geqslant ۰$، می‌شود، به‌دست آورد.

البته، نابرابریهای پیچیده‌تر معمولاً با چند بار استفاده از نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی یا ترکیب چند ایدهٔ مختلف حل می‌شوند. نمونه‌ای از این دست مثال زیر است:

مسألهٔ ۲۲. ثابت کنید به‌ازای هر x، y و z،

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geqslant xy + yz + zx$$

برای اثبات این حکم از مسألهٔ ۱۹ استفاده می‌کنیم و سه نابرابری

$$\frac{۱}{۲}(x^۲ + y^۲) \geqslant xy, \qquad \frac{۱}{۲}(x^۲ + z^۲) \geqslant xz, \qquad \frac{۱}{۲}(y^۲ + z^۲) \geqslant yz$$

را می‌نویسیم. اگر این نابرابریها را جمع کنیم به نتیجه می‌رسیم.

مسألهٔ ۲۳. اگر $a, b, c \geqslant ۰$، ثابت کنید

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant ۸abc$$

مسألهٔ ۲۴. اگر $a, b, c \geqslant ۰$، ثابت کنید

$$ab + bc + ca \geqslant a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}$$

مسألهٔ ۲۵. ثابت کنید به‌ازای هر x و y،

$$x^۲ + y^۲ + ۱ \geqslant xy + x + y$$

مسألهٔ ۲۶. ثابت کنید به‌ازای هر a، b و c نابرابری

$$a^۴ + b^۴ + c^۴ \geqslant abc(a+b+c)$$

درست است.

راه‌حل. از نابرابری مسألهٔ ۲۲ استفاده می‌کنیم-دو بار!

$$\begin{aligned} a^۴ + b^۴ + c^۴ &= (a^۲)^۲ + (b^۲)^۲ + (c^۲)^۲ \\ &\geqslant a^۲b^۲ + b^۲c^۲ + c^۲a^۲ \\ &= (ab)^۲ + (bc)^۲ + (ca)^۲ \\ &\geqslant (ab)(bc) + (bc)(ca) + (ca)(ab) \\ &= abc(a+b+c) \end{aligned}$$

نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی از دو منظر قابل توجه است. اول اینکه می‌توانیم با آن مجموع دو عدد مثبت را برحسب حاصل‌ضربشان برآورد کنیم. دوم اینکه می‌توانیم آن را به بیش از دو عدد تعمیم دهیم. مثلاً، نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی برای چهار عدد چنین است: به‌ازای هر a، b، c و d غیرمنفی،

$$\frac{a+b+c+d}{۴} \geqslant \sqrt[۴]{abcd}$$

در اینجا هم، مانند قبل، سمت چپ و سمت راست این نابرابری را به‌ترتیب میانگین حسابی و میانگین هندسی چهار عدد مفروض می‌نامند.

این نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی را می‌توان به شکل زیر ثابت کرد:

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c+d}{۴} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{a+b}{۲} + \frac{c+d}{۲}\right) &\geqslant \frac{۱}{۲}\left(\sqrt{ab} + \sqrt{cd}\right) \\ &\geqslant \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt[۴]{abcd} \end{aligned}$$

که در اینجا از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی دو بار استفاده کرده‌ایم.

مسألهٔ ۲۷. ثابت کنید به‌ازای هر x و y،

$$x^۴ + y^۴ + ۸ \geqslant ۸xy$$

مسألهٔ ۲۸. اگر a، b، c و d عددهایی مثبت باشند، ثابت کنید

$$(a+b+c+d)\left(\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} + \frac{۱}{d}\right) \geqslant ۱۶$$

البته، اثبات نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی برای سه عدد غیرمنفی به این سادگی نیست: به‌ازای هر a، b و c غیرمنفی،

$$\frac{a+b+c}{۳} \geqslant \sqrt[۳]{abc}$$

چهار عدد در نظر می‌گیریم: a، b، c و m که $m = \sqrt[۳]{abc}$. در این صورت

$$\frac{a+b+c+m}{۴} \geqslant \sqrt[۴]{abcm} = \sqrt[۴]{m^۳ m} = m$$

بنابراین $\frac{a+b+c}{۴} \geqslant \frac{۳m}{۴}$ و در نتیجه $a+b+c \geqslant ۳m$ یا

$$\frac{a+b+c}{۳} \geqslant \sqrt[۳]{abc}$$

مسألهٔ ۲۹. اگر a، b و c عددهایی مثبت باشند، ثابت کنید

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant ۳$$

مسألهٔ ۳۰. ثابت کنید اگر $x \geqslant ۰$، آن‌وقت $۳x^۳ - ۶x^۲ + ۴ \geqslant ۰$.

راه‌حل. ثابت می‌کنیم $۳x^۳ + ۴ \geqslant ۶x^۲$. چون $۳x^۳ + ۴ = ۲x^۳ + x^۳ + ۴$، می‌توانیم از نابرابری میانگین حسابی-میانگین هندسی استفاده کنیم و به‌دست بیاوریم

$$۲x^۳ + x^۳ + ۴ \geqslant ۳\sqrt[۳]{۲x^۳ \times x^۳ \times ۴} = ۳ \times ۲x^۲ = ۶x^۲$$

گوناگون (تمرین منزل)

۳۱. ثابت کنید اگر $a, b, c > ۰$، آن‌وقت

$$\frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \frac{۱}{c} \geqslant \frac{۱}{\sqrt{ab}} + \frac{۱}{\sqrt{bc}} + \frac{۱}{\sqrt{ca}}$$

۳۲. ثابت کنید اگر $a, b, c > ۰$، آن‌وقت

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geqslant a+b+c$$

۳۳. ثابت کنید اگر $a, b, c \geqslant ۰$، آن‌وقت

$$\left(\frac{a+b+c}{۳}\right)^۲ \geqslant \frac{ab+bc+ca}{۳}$$

۳۴. ثابت کنید اگر $a,b,c \geqslant ۰$، آن‌وقت

$$(ab+bc+ca)^۲ \geqslant ۳abc(a+b+c)$$

۳۵. مجموع سه مثبت برابر با ۶ است. ثابت کنید مجموع مربعهایشان از ۱۲ کمتر نیست.

۳۶. مجموع دو عدد غیرمنفی برابر با ۱۰ است. بیشترین مقدار و کمترین مقدار ممکن مجموع مربعهایشان چقدر است؟

۳۷*. نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی را برای پنج عدد غیرمنفی ثابت کنید؛ یعنی، ثابت کنید اگر a، b، c، d و e غیرمنفی باشند، آن‌وقت

$$\frac{a+b+c+d+e}{۵} \geqslant \sqrt[۵]{abcde}$$

راهنمایی: ابتدا نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی را برای هشت عدد ثابت کنید و سپس از ایدهٔ اثبات نابرابری میانگین حسابی ـ میانگین هندسی برای سه عدد استفاده کنید.

۳. تبدیلها

گاهی ممکن است با خوش‌اقبالی تبدیلی پیدا کنیم که برای حل مسأله‌ای کمک کند یا نابرابری به کمک آن بلافاصله ثابت شود. مثالی از این دست می‌آوریم:

نابرابری

$$x^۲+y^۲+z^۲ \geqslant xy+yz+zx$$

را دوباره بررسی می‌کنیم. می‌توان این نابرابری را به شکل زیر ثابت کرد. تفاضل دو طرف نابرابری را به شکل زیر می‌نویسیم

$$x^۲+y^۲+z^۲-xy-yz-zx = \frac{۱}{۲}\left((x-y)^۲+(y-z)^۲+(z-x)^۲\right) \geqslant ۰$$

در حقیقت، این شگرد همان روش «کامل کردن مربعها» است، که معمولاً برای حل کردن معادله‌های درجهٔ دوم ساده به‌کار می‌رود. مثالی دیگر مسألهٔ بعد است.

مسألهٔ ۳۸. معادلهٔ

$$a^۲+b^۲+c^۲+d^۲-ab-bc-cd-d+\frac{۲}{۵}=۰$$

را حل کنید.

ممکن است بگویید «اینکه نابرابری نیست!» درست است، اما اولاً می‌توانیم از همین روش استفاده کنیم و ثانیاً می‌توان نابرابری به‌دست آورد:

$$a^۲+b^۲+c^۲+d^۲-ab-bc-cd-d+\frac{۲}{۵}$$
$$=\left(a-\frac{b}{۲}\right)^۲+\frac{۳}{۴}\left(b-\frac{۲c}{۳}\right)^۲+\frac{۲}{۳}\left(c-\frac{۳d}{۴}\right)^۲+\frac{۵}{۸}\left(d-\frac{۴}{۵}\right)^۲$$

و راه‌حل به‌دست می‌آید. در حقیقت، مجموع مربعها وقتی و فقط وقتی صفر است که همهٔ جمعوندها صفر باشند. بنابراین پاسخ چنین است:

$$d=\frac{۴}{۵},\quad c=\frac{۳d}{۴}=\frac{۳}{۵},\quad b=\frac{۲c}{۳}=\frac{۲}{۵},\quad a=\frac{b}{۲}=\frac{۱}{۵}$$

مسألهٔ ۳۹. فرض کنید $a+b=۱$. بیشترین مقدار ممکن حاصل‌ضرب ab چقدر است؟

راهنمایی: $a(۱-a)=\frac{۱}{۴}-\left(\frac{۱}{۲}-a\right)^۲$.

مسألهٔ ۴۰. ثابت کنید به‌ازای هر a، b و c،

$$\frac{a^۲}{۴}+b^۲+c^۲\geqslant ab-ac+۲bc$$

مسألهٔ ۴۱. فرض کنید k، l و m عددهایی طبیعی باشند. ثابت کنید

$$۲^{k+l}+۲^{k+m}+۲^{l+m}\leqslant ۲^{k+l+m+۱}+۱$$

مسألهٔ ۴۲. اگر $a+b+c=۰$، ثابت کنید $ab+bc+ca\leqslant ۰$.

مسألهٔ ۴۰ را حل می‌کنیم. همه‌چیز را به سمت چپ می‌آوریم و می‌نویسیم

$$\frac{a^۲}{۴}+b^۲+c^۲-ab+ac-۲bc=\left(\frac{a}{۲}-b+c\right)^۲\geqslant ۰$$

که بنابر نابرابری «اصلی» درست است.

* * *

اکنون از ایدهٔ درخشان دیگری بحث می‌کنیم که معلوم شده است در مورد نابرابریهایی که نوعی تقارن دارند (و نیز به تجزیه ربطی دارند) کاملاً کارساز است.

لم. اگر $a\geqslant b$ و $x\geqslant y$، آن‌وقت $ax+by\geqslant ay+bx$.

برهان. در حقیقت،

$$ax+by-ay-bx=(a-b)(x-y)\geqslant ۰$$

توضیح. اگر مثلاً f تابعی صعودی باشد، آن‌وقت به ازای هر دو عدد مانند a و b،

$$(a-b)\left(f(a)-f(b)\right)\geqslant ۰$$

که در حقیقت تعبیر دیگری از تعریف تابع صعودی است.

از این ایده می‌توان به شکل زیر استفاده کرد:

مسألهٔ ۴۳. ثابت کنید به ازای هر x و y،

$$\frac{x^۶}{y^۲}+\frac{y^۶}{x^۲}\geqslant x^۴+y^۴$$

راه‌حل. $x^۲$ را با a و $y^۲$ را با b نشان می‌دهیم. در این صورت

$$\begin{aligned}\frac{x^۶}{y^۲}+\frac{y^۶}{x^۲}-x^۴-y^۴&=\frac{a^۳}{b}+\frac{b^۳}{a}-a^۲-b^۲\\&=\frac{(a-b)a^۲}{b}+\frac{(b-a)b^۲}{a}\\&=(a-b)\left(\frac{a^۲}{b}-\frac{b^۲}{a}\right)=\frac{(a-b)(a^۳-b^۳)}{ab}\geqslant ۰\end{aligned}$$

بار دیگر تأکید می‌کنیم که عددهای $a-b$ و $a^۳-b^۳$ هم‌علامت‌اند.

مسألهٔ ۴۴. اگر $x,y>۰$، ثابت کنید

$$\sqrt{\frac{x^۲}{y}}+\sqrt{\frac{y^۲}{x}}\geqslant\sqrt{x}+\sqrt{y}$$

مسألهٔ ۴۵. اگر $a,b,c\geqslant ۰$، ثابت کنید

$$۲(a^۳+b^۳+c^۳)\geqslant a^۲b+ab^۲+a^۲c+ac^۲+b^۲c+bc^۲$$

راه‌حل. همهٔ جمله‌ها را به یک طرف بیاورید و آنها را چهارتا چهارتا دسته‌بندی کنید:

$$(a^۳+b^۳-a^۲b-ab^۲)+(b^۳+c^۳-b^۲c-bc^۲)+(a^۳+c^۳-a^۲c-ac^۲)$$

عبارت درون هر یک از پرانتزها را می‌توان به شکل زیر تجزیه کرد:

$$a^۳ + b^۳ - a^۲b - ab^۲ = (a-b)(a^۲ - b^۲) \geqslant ۰$$

و راه‌حل کامل می‌شود.

مسألهٔ ۴۶*. اگر $a_۱ \leqslant a_۲ \leqslant \cdots \leqslant a_n$ و $b_۱ \leqslant b_۲ \leqslant \cdots \leqslant b_n$، ثابت کنید

$$a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + \cdots + a_nb_n \geqslant a_۱c_۱ + a_۲c_۲ + \cdots + a_nc_n$$

که در آن $c_۱$، $c_۲$، ... و c_n جایگشتی دلخواه از عددهای $b_۱$، $b_۲$، ... و b_nاند.

گوناگون

۴۷. ثابت کنید به‌ازای هر x،

$$x(x+۱)(x+۲)(x+۳) \geqslant -۱$$

۴۸. ثابت کنید به ازای هر x، y و z،

$$x^۴ + y^۴ + z^۲ + ۱ \geqslant ۲x(xy^۲ - x + z + ۱)$$

۴۹*. ثابت کنید

$$\frac{۱}{۱+\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۴}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{۹۹}+\sqrt{۱۰۰}} > \frac{۹}{۲}$$

۵۰. اگر $x, y \geqslant ۰$، ثابت کنید $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^۸ \geqslant ۶۴xy(x+y)^۲$.

توصیه به معلمان. با استفاده از ایدهٔ مطرح شده در لم بالا و نیز نابرابری مسألهٔ ۴۶ می‌توان نابرابریهای دشوارتری را طرح کرد. توصیه می‌کنیم که اگر مسأله‌هایی در این سطح برای کلاسهایتان مناسب نیست فقط ایدهٔ کلی را مطرح کنید و آن را با دو یا سه مثال توضیح دهید.

۴. استقرا و نابرابریها

گاهی نابرابریها متغیری دارند که مقدارهایش عددهایی طبیعی‌اند یا یکی از عددها نقش این متغیر را در پوشش مبدل دارد (مثلاً، مسألهٔ ۷ را ببینید). در ضمن، توانایی یافتن چنین متغیری را، نه فقط در مورد نابرابریها، باید تقویت کرد. چنین نابرابریهایی را معمولاً می‌توان به استقرا ثابت کرد.

مسألهٔ ۵۱. ثابت کنید اگر $n \geqslant ۳$، آن‌وقت

$$\frac{۱}{n+۱}+\frac{۱}{n+۲}+\cdots+\frac{۱}{۲n}>\frac{۳}{۵}$$

راه‌حل. پایهٔ استقرا: $n=۳$. می‌توان نوشت

$$\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۶}=\frac{۳۷}{۶۰}>\frac{۳}{۵}$$

گام استقرایی، از $n=k$ به $n=k+۱$، را ثابت می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\frac{۱}{k+۲}&+\frac{۱}{k+۳}+\cdots+\frac{۱}{۲k+۲}\\ &=\frac{۱}{k+۱}+\frac{۱}{k+۲}+\cdots+\frac{۱}{۲k}+\frac{۱}{۲k+۱}+\frac{۱}{۲k+۲}-\frac{۱}{k+۱}\\ &>\frac{۱}{k+۱}+\frac{۱}{k+۲}+\cdots+\frac{۱}{۲k}>\frac{۳}{۵}\end{aligned}$$

یکی از روشهای رایج اثبات استقرایی نابرابریها را در زیر توضیح داده‌ایم. فرض کنید دو دسته از عددها مانند $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، ... و $b_۱$، $b_۲$، ...، b_n، ... مفروض‌اند و می‌دانیم که

الف) $a_۱ \geqslant b_۱$ (پایهٔ استقرا)

ب) اگر $k \leqslant n$، $a_k - a_{k-۱} \geqslant b_k - b_{k-۱}$ (گام استقرا)

در این صورت $a_n \geqslant b_n$.

مسألهٔ ۵۲. اگر n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید

$$۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}}<۲\sqrt{n}$$

مسألهٔ ۵۳. اگر n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید

$$۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}}>۲(\sqrt{n+۱}-۱)$$

مسألهٔ ۵۴. اگر n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید

$$\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\frac{۱}{۴^۲}+\cdots+\frac{۱}{n^۲}<۱$$

مسألهٔ ۵۴ را نمی‌توان به روش پیش‌گفته ثابت کرد. دنبالهٔ (a_n)، که

$$a_n=\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۳^۲}+\cdots+\frac{۱}{n^۲}$$

صعودی اکید است، اما دنبالهٔ (b_n)، که $b_n = ۱$، ثابت است. بنابراین قسمت (ب) درست نیست و نمی‌توانیم از این روش استفاده کنیم.

پس چه کار کنیم؟ در اینجا یکی از ویژگیهای شگفت‌آور استقرای ریاضی آشکار می‌شود. به‌نظر می‌رسد که گاهی راحت‌تر است که حکمی قویتر، یا مانند این مورد، نابرابریی دقیقتر، را ثابت کنیم. بنابراین،

راه‌حل. دنبالهٔ (b_n) را به‌گونه‌ای دیگر انتخاب می‌کنیم، یعنی $b_n = ۱ - \frac{۱}{n}$.

پایهٔ استقرا. اگر $n = ۲$، معلوم می‌شود که $\frac{۱}{۲^۲} < ۱ - \frac{۱}{۲}$.

گام استقرایی (مطابق روش بالا!):

$$a_k - a_{k-۱} = \frac{۱}{k^۲}, \qquad b_k - b_{k-۱} = \frac{۱}{k(k-۱)}$$

یعنی، $a_k - a_{k-۱} < b_k - b_{k-۱}$. بنابراین، به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n،

$$a_n < b_n = ۱ - \frac{۱}{n} < ۱$$

* * *

مسألهٔ ۵۵. (نابرابری برنولی) اگر $x \geqslant ۰$ و n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید $(۱+x)^n \geqslant ۱ + nx$.

راهنمایی: این مسأله راه‌حلی غیراستقرایی دارد که برای کسانی که با قضیهٔ دوجمله‌ای نیوتن آشنا هستند (فصل «ترکیبیات-۲» را ببینید)، واضح به‌نظر می‌رسد. در حقیقت،

$$(۱+x)^n = ۱ + \binom{n}{۱}x + \binom{n}{۲}x^۲ + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

و همهٔ جمعوندها پس از دو تای اول غیرمنفی‌اند، بنابراین

$$(۱+x)^n \geqslant ۱ + \binom{n}{۱}x = ۱ + nx$$

از طرف دیگر، روش کلی دیگری وجود دارد که دربارهٔ مسأله‌هایی از این نوع است. این روش را در زیر توضیح داده‌ایم (با همان نمادگذاری روش قبل): اگر

الف) $a_۱ \geqslant b_۱$ (پایهٔ استقرا)

ب) اگر $k \leqslant n$، $\frac{a_k}{a_{k-۱}} \geqslant \frac{b_k}{b_{k-۱}}$ (گام استقرایی)

آن‌وقت $a_n \geqslant b_n$. این هم نتیجه‌ای دیگر از روش استقرای ریاضی است.

مسألهٔ ۵۶. اگر n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید $n^n > (n+1)^{n-1}$.

مسألهٔ ۵۷. اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از یا برابر با ۴ باشد، ثابت کنید $n! \geqslant 2^n$.

مسألهٔ ۵۸. اگر n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید $2^n \geqslant 2n$.

مسألهٔ ۵۹. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که $2^n \geqslant n^3$.

راه‌حل مسألهٔ ۵۶ را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم $a_n = n^n$ و $b_n = (n+1)^{n-1}$. حکم به‌ازای $n = 1$ و $n = 2$ درست است، پس پایهٔ استقرا ثابت شده است. برای اثبات گام استقرایی، کافی است ثابت کنیم

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \geqslant \frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{(k+1)^{k-1}}{k^{k-2}}$$

یا، معادل آن، $k^{2k-2} \geqslant (k^2-1)^{k-1}$؛ یعنی، $(k^2)^{k-1} \geqslant (k^2-1)^{k-1}$.

گوناگون

۶۰. ثابت کنید به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n نابرابری $3^n > n \times 2^n$ درست است.

۶۱. کدام‌یک از دو عدد

$$2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}} \text{ (ده‌تا ۲)}, \qquad 3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}} \text{ (نه‌تا ۳)}$$

بزرگتر است؟ اگر هشت تا ۳ باشد چطور؟

۶۲. حاصل‌ضرب عددهای مثبت a_1، a_2، ... و a_n برابر با ۱ است. ثابت کنید

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geqslant 2^n$$

یادداشت. این مسأله راه‌حل غیراستقرایی دیگر هم دارد.

۶۳. اگر $x \geqslant -1$ و $n \geqslant 1$، نابرابری برنولی، $(1+x)^n \geqslant 1+nx$، را ثابت کنید.

۶۴. مجموع عددهای مثبت x_1، x_2، ... و x_n برابر با $\frac{1}{2}$ است. ثابت کنید

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} \times \frac{1-x_2}{1+x_2} \times \cdots \times \frac{1-x_n}{1+x_n} \geqslant \frac{1}{3}$$

توصیه به معلمان. در این بخش دو مبحث در هم ادغام شده‌اند، و آنقدر مهم هستند که چندین جلسه به هر یک از آنها اختصاص یابد. این دو مبحث «استقرا» و «نابرابریها» هستند. باید توجه کرد دانش‌آموزان در مبحث «استقرا» معمولاً موضوع «استفاده از استقرا در نابرابریها» را راحت‌تر از بقیه (که

انتزاعی‌ترند) می‌فهمند. گرچه می‌توانیم مسأله‌های زیادی شبیه به مسأله‌های ۵۱ – ۶۰ مطرح کنیم، اما نباید در این‌باره افراط کنیم.

مهم است که به دانش‌آموزانتان سؤالهایی بدهید که حل کردن آنها تفکری نامتعارف می‌خواهد. همچنین، باید دستشان را در یافتن راه‌حلهای غیراستقرایی برای مسأله باز بگذارید.

۵. نابرابریهایی برای همه

مسأله‌های این بخش بر حسب روشهای راه‌حلشان مرتب نشده‌اند. البته، سعی کرده‌ایم آنها را از ساده به دشوار مرتب کنیم.

۶۵. طنابی را در امتداد استوا طوری کشیده‌ایم که هیچ حفره‌ای باقی نمانده است. سپس آن را کشیده‌ایم تا یک سانتی‌متر بلندتر شود و بعد باز هم در امتداد استوا کشیده‌ایم تا در جایی از زمین فاصله بگیرد. آیا کسی می‌تواند از حفرهٔ ایجاد شده رد شود؟

۶۶. فرض کنید زمین از خمیر ساخته شده باشد و آن را به شکل «سوسیس» نازکی لوله می‌کنیم تا به خورشید برسد. ضخامت این «سوسیس» چقدر است؟ جوابی به‌دست بیاورید که حداکثر ۱۰۰۰٪ با جواب واقعی اختلاف داشته باشد.

۶۷. آیا می‌توان خلایق روی کرهٔ زمین و همهٔ ساخته‌های نوع بشر را در مکعبی با یالی به طول ۲ مایل جا داد؟

۶۸. ثابت کنید $100! < 50^{100}$.

۶۹. اگر n عددی طبیعی باشد، ثابت کنید $\frac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.

۷۰. اگر $0 < x < y < 1$، ثابت کنید $\frac{x-y}{1-xy} < 1$.

۷۱. اگر $a, b, c, d \geqslant 0$، $c + d \leqslant a$ و $c + d \leqslant b$، ثابت کنید $ad + bc \leqslant ab$.

۷۲. آیا مجموعه‌ای از عددها وجود دارد که مجموعشان ۱ باشد و مجموع مربعهایشان از ۰٫۰۱ کمتر باشد؟

۷۳. فرض کنید $a, b, c > 0$ و $abc = 1$. می‌دانیم $a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. ثابت کنید دقیقاً یکی از عددهای a، b و c از ۱ بزرگتر است.

۷۴. عددهای x و y متعلق به بازهٔ $[0, 1]$اند. ثابت کنید

$$\frac{x}{1+y} + \frac{y}{1+x} \leqslant 1$$

۷۵. فرض کنید a، b و c عددهایی طبیعی‌اند که $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$. ثابت کنید

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant \frac{41}{42}$$

۷۶. اگر x، y و z عددهایی مثبت باشند، ثابت کنید

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}\leqslant ۲$$

۷۷. ثابت کنید

$$\left(۱-\frac{۱}{۴}\right)\left(۱-\frac{۱}{۹}\right)\left(۱-\frac{۱}{۱۶}\right)\cdots\left(۱-\frac{۱}{n^{۲}}\right)>\frac{۱}{۲}$$

۷۸. ثابت کنید به‌ازای هر x، نابرابری $x^{۴}-x^{۳}+۳x^{۲}-۲x+۲\geqslant ۰$ درست است.

۷۹. عددهای a، b، c و d متعلق به بازهٔ $[۰, ۱]$اند. ثابت کنید

$$(a+b+c+d+۱)^{۲}\geqslant ۴(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}+d^{۲})$$

۸۰. فرض کنید x و y بزرگتر از صفر باشند. کوچکترین عدد در میان عددهای x، $\frac{۱}{y}$ و $y+\frac{۱}{x}$ را با S نشان می‌دهیم. بیشترین مقدار ممکن S چقدر است؟

*۸۱. فرض کنید a، b، c و d عددهایی مثبت باشند. ثابت کنید دست‌کم یکی از نابرابریهای

۱) $a+b<c+d$

۲) $(a+b)cd<ab(c+d)$

۳) $(a+b)(c+d)<ab+cd$

درست نیست.

*۸۲. ثابت کنید اگر عددهای $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ مثبت باشند، نابرابریهای

$$\frac{a_۱b_۲}{a_۱+b_۲}<\frac{a_۲b_۱}{a_۲+b_۱},\qquad \frac{a_۲b_۳}{a_۲+b_۳}<\frac{a_۳b_۲}{a_۳+b_۲},\qquad \frac{a_۳b_۱}{a_۳+b_۱}<\frac{a_۱b_۳}{a_۱+b_۳}$$

همزمان درست نیستند.

*۸۳. ثابت کنید اگر $x+y+z\geqslant xyz$، آن‌وقت $x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}\geqslant xyz$.

فصل ۱۷

مسأله‌هایی برای سال دوم

احتمالاً متوجه شده‌اید که برخی مباحث سال اول را در بخش دوم کتاب گسترش داده‌ایم ـ برخی را هم (نظیر «زوجیت»، «اصل لانه‌کبوتری» و «بازیها») خیر. البته، برخی مسأله‌های مربوط به این مباحث را در فصلهای مربوطشان در بخش اول کتاب نیاورده‌ایم، زیرا دشوارترند. در ابتدای این فصل، این نقیصه را جبران می‌کنیم.

۱. زوجیت

۱. ثابت کنید معادلهٔ

$$\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c}+\frac{۱}{d}+\frac{۱}{e}+\frac{۱}{f}=۱$$

در مجموعهٔ عددهای فرد جواب ندارد.

۲. هشت رخ روی صفحهٔ شطرنج طوری قرار گرفته‌اند که هیچ‌یک از آنها دیگری را تهدید نمی‌کند. ثابت کنید تعداد رخهایی که روی خانه‌های سیاه قرار گرفته‌اند زوج است.

۳. آیا می‌توان ۲۰ سرباز قرمز و آبی را دور دایره طوری چید که هر سرباز آبی روبه‌روی سربازی قرمز قرار داشته باشد و هیچ دو سرباز آبی‌ای کنار هم نباشند.

۴. نقطه‌های A و B روی خطی راست انتخاب شده‌اند. سپس ۱۰۰۱ نقطهٔ دیگر بیرون پاره‌خط AB انتخاب و با رنگ قرمز یا آبی‌رنگ شده‌اند. ثابت کنید مجموع فاصله‌های A تا نقطه‌های قرمز و فاصله‌های B تا نقطه‌های آبی با مجموع فاصله‌های B تا نقطه‌های قرمز و فاصله‌های A تا نقطه‌های آبی برابر نیست.

۵. ده جفت کارت داریم که روی آنها عددهای ۰، ۰، ۱، ۱، ... ، ۸، ۸، ۹ و ۹ نوشته شده است. ثابت کنید نمی‌توان این کارتها را در یک ردیف طوری چید که بین هر دو کارت که روی آنها عدد n نوشته شده است دقیقاً n کارت قرار گرفته باشد ($n=۰,۱,\ldots,۹$).

۶. بیست نقطه که ۲۰ ضلعی‌ای منتظم تشکیل داده‌اند روی دایره‌ای انتخاب شده‌اند. سپس این نقطه‌ها به ده جفت تقسیم شده‌اند و نقطه‌های هر جفت با وتری به هم وصل شده‌اند. ثابت کنید طول برخی از این وترها با هم برابر است.

۷. مربعی ۶ × ۶ با دومینوهای ۲ × ۱ بدون همپوشانی پوشانده شده است. ثابت کنید می‌توان مربع را در امتداد خطی راست که موازی ضلعهایش است طوری برید که هیچ‌یک از دومینوها بریده نشود.

۸. حلزونی از نقطهٔ O با سرعتی ثابت شروع به خزیدن می‌کند و هر نیم ساعت یک بار °۶۰ می‌چرخد. ثابت کنید فقط وقتی ممکن است این حلزون به نقطهٔ O بازگردد که تعداد ساعتهای گذشته عددی طبیعی باشد.

*۹. یک دستگاه ضبط‌صوت و n حلقه نوار داریم که خط ابتدایشان در روی نوارها قرمز و در پشت نوارها سبز است. همهٔ nهایی را پیدا کنید که فقط به کمک یک حلقهٔ خالی، وقتی همهٔ نوارها به ابتدای حلقه برگردانده می‌شوند، خط ابتدای سبز در طرف رویشان باشد.

۲. اصل لانه‌کبوتری

۱۰. نقطه‌های خطی را با ۱۱ رنگ، رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید می‌توان دو نقطهٔ همرنگ پیدا کرد که فاصله‌شان برحسب متر عددی طبیعی باشد.

۱۱. هفت خط در صفحه قرار دارند. ثابت کنید زاویهٔ میان دو تا از آنها از °۲۶ کمتر است.

۱۲. هر خانهٔ جدولی ۴۱ × ۵ یا سفید شده است یا سیاه. ثابت کنید می‌توانیم سه ستون و سه سطر طوری انتخاب کنیم که هر نه خانه‌ای که از اشتراکشان ایجاد می‌شود همرنگ باشند.

*۱۳. هر نقطهٔ صفحه با یکی از الف) ۲؛ ب) ۳؛ ج) ۱۰۰ رنگی که در اختیار داریم رنگ می‌شود. ثابت کنید می‌توانیم مستطیلی پیدا کنیم که همهٔ رأسهایش به یک رنگ باشند.

۱۴. شش دوست قرار می‌گذارند که در روز جمعه به دیدن هفت نمایش بروند. نمایشها در ساعتهای ۹ صبح، ۱۰ صبح، ۱۱ صبح، ... و ۷ بعد از ظهر شروع می‌شوند. رأس هر ساعت دو نفر از آنها به دیدن یک نمایش می‌روند و بقیه به دیدن نمایشی دیگر می‌روند. در انتهای روز همهٔ آنها هر هفت نمایش را دیده‌اند. ثابت کنید در مورد هر نمایش، زمان اجرایی وجود دارد که هیچ‌یک از این دوستان برای دیدن آن نرفته است.

۱۵. حداکثر چند عنکبوت می‌توانند به‌طور مسالمت‌آمیز روی یالهای مکعبی که هر یالش ۱ متر است زندگی کنند؟ هر عنکبوت می‌تواند همسایگانش را تا حداکثر به فاصلهٔ الف) ۱ متری؛ ب) ۱/۱ متری (از روی یالها) تحمل کند.

۱۶. از هر دو ۱۶ضلعی منتظم همنهشت هفت رأس انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید این چندضلعیها را

می‌توانیم طوری روی هم قرار دهیم که دست‌کم چهار رأس انتخاب شدهٔ یکی از چندضلعیها بر چهار رأس انتخاب شدهٔ چندضلعی دیگر منطبق شود.

۱۷. مجموعه‌ای از ده عدد دورقمی داده شده است. ثابت کنید می‌توان دو زیرمجموعهٔ جدا از هم از این عددها طوری انتخاب کرد که مجموعشان برابر باشد.

۱۸. بیست و پنج نقطه روی صفحه مفروض‌اند. می‌دانیم که از هر سه‌تا از آنها می‌توان دوتا را انتخاب کرد که فاصله‌شان از هم ۱ سانتی‌متر باشد. ثابت کنید ۱۳ تا از این نقطه‌ها وجود دارند که درون دایره‌ای به شعاع ۱ قرار دارند.

۱۹. شش نقطه درون مستطیلی ۴×۳ مفروض‌اند. ثابت کنید می‌توان دو تا از آنها را طوری انتخاب کرد که فاصله‌شان حداکثر $\sqrt{5}$ باشد.

۲۰. مجموعهٔ A از عددهای طبیعی تشکیل شده است و می‌دانیم که در میان هر ۱۰۰ عدد طبیعی متوالی عضوی از A وجود دارد. ثابت کنید می‌توان چهار عدد مختلف مانند a، b، c و d در مجموعهٔ A پیدا کرد که $a+b=c+d$.

۲۱. نود و نه مربع ۲×۲ را از صفحهٔ کاغذی شطرنجی به ابعاد ۲۹×۲۹ بریده‌ایم. ثابت کنید باز هم می‌توان مربع ۲×۲ دیگری را برید.

۲۲. جدولی ۱۰×۱۰ را با پنجاه و پنج مربع ۲×۲ پوشانده‌ایم. ثابت کنید می‌توان یکی از آنها را طوری برداشت که بقیه باز هم جدول را بپوشانند.

*۲۳. یک استاد بزرگ شطرنج هر روز دست‌کم یک بار شطرنج بازی می‌کند، اما هر هفته (از شنبه تا جمعه) بیش از ۱۲ بار شطرنج بازی نمی‌کند. ثابت کنید می‌توان چند روز متوالی در سال پیدا کرد که این استاد در طی این مدت دقیقاً ۲۰ بار شطرنج بازی کرده است.

۲۴. ده پاره‌خط جدا از هم به رنگ قرمز روی پاره‌خطی به طول ۱۰ سانتی‌متر مفروض‌اند. معلوم شده است که فاصلهٔ هیچ دو نقطهٔ قرمزی دقیقاً ۱ سانتی‌متر نیست. ثابت کنید مجموع طولهای پاره‌خطهای قرمز از ۵ سانتی‌متر بیشتر نیست.

۲۵. ۱۰۱ نقطه درون مربعی ۱×۱ مفروض‌اند. ثابت کنید سه تا از این نقطه‌ها مثلثی می‌سازند که مساحتش از ۰٫۰۱ بیشتر نیست.

۲۶. چند دایره که مجموع شعاعهایشان $\frac{3}{5}$ است درون مربعی ۱×۱ قرار گرفته‌اند. ثابت کنید خطی موازی ضلعی از این مربع وجود دارد که دست‌کم دوتا از این دایره‌ها را قطع می‌کند.

۲۷. درون دایره‌ای به شعاع ۱ چند وتر طوری رسم کرده‌ایم که هر قطر دایره حداکثر چهارتا از آنها را قطع کرده است. ثابت کنید مجموع طولهای این وترها از ۱۳ بیشتر نیست.

*۲۸. ۱۰۰ ساعت قدیمی (غیردیجیتال) در مغازهٔ عتیقه فروشی وجود دارد که همگی کار می‌کنند اما لزوماً زمان درست را نشان نمی‌دهند. ثابت کنید زمانی وجود دارد که در آن مجموع فاصله‌های

مرکز مغازه تا مرکز ساعتها از مجموع فاصله‌های مرکز مغازه تا نوک عقربه‌های ساعت‌شمار ساعتها کمتر است. اگر برخی از ساعتها سریعتر یا کندتر حرکت کنند، حکم چیست؟

۳. بازیها

در همهٔ مسأله‌های این بخش فرض می‌کنیم که دو بازیکن داریم که به نوبت، یکی پس از دیگری، حرکت می‌کنند. مگر در مواردی که ذکر می‌کنیم، باید مشخص کنید که کدامشان می‌برد (بازیکنی که اول حرکت می‌کند، یا دیگری).

۲۹. در هر کدام از سه خانهٔ آخر سمت چپ جدولی ۲۰×۱ سربازی قرار داده‌ایم. در هر حرکت می‌توان یک سرباز را به یکی از خانه‌های خالی سمت راست برد، به شرطی که لازم نباشد از روی هیچ سرباز دیگری رد شود. بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد.

۳۰. در هر کدام از سه خانهٔ آخر سمت چپ جدولی ۲۰×۱ سربازی قرار داده‌ایم. در هر حرکت می‌توان یکی از سربازها را به خانهٔ سمت راست مجاورش، به‌شرطی که خالی باشد، برد. اگر این خانهٔ مجاور خالی نبود اما خانهٔ سمت راست بعدی‌اش خالی بود، می‌توان سرباز را به این خانهٔ خالی منتقل کرد. بازیکنی که نتواند حرکت کند می‌بازد.

۳۱. عدد ۱۲۳۴ روی تخته‌سیاه نوشته شده است. در هر حرکت می‌توان رقمی غیرصفر از عدد نوشته شده را از این عدد کم کرد (این تفاضل را به جای عدد قبلی روی تخته‌سیاه می‌نویسیم). بازیکنی که عدد صفر را بنویسد می‌برد.

۳۲. عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را در یک سطر نوشته‌ایم. در هر حرکت می‌توان یکی از علامتهای «+»، «−» یا «×» را در جایی خالی میان دو عدد مجاور قرار داد. اگر نتیجهٔ نهایی عددی فرد باشد، بازیکن اول می‌برد در غیر این صورت می‌بازد.

۳۳. عددهای ۱، ۲، ۳، ...، ۲۰ و ۲۱ را در یک سطر روی تخته‌سیاه نوشته‌ایم. در هر حرکت می‌توان یکی از عددهای خط‌نخورده را خط زد. وقتی که فقط دو عدد روی تخته‌سیاه مانده باشد بازی خاتمه می‌یابد. اگر مجموع این عددها بر ۵ بخش‌پذیر باشد، بازیکن اول می‌برد، در غیر این صورت بازیکن اول می‌بازد.

۳۴. جدولی با ابعاد الف) ۱۰×۱۰؛ ب) ۹×۹ مفروض است. در هر حرکت می‌توان در یکی از خانه‌های خالی یک علامت مثبت یا منفی نوشت (هر بازیکن در نوبتش می‌تواند یکی از این علامتها را انتخاب کند). بازیکنی که حرکتش سه علامت یکسان پشت سر هم روی یک خط راست (عمودی، افقی یا قطری) ایجاد کند بازی را می‌برد.

۳۵. دو کپه شکلات روی میز وجود دارد: یکی ۲۲ شکلات دارد و دیگری ۲۳ شکلات. در هر حرکت یا می‌توان دو شکلات از یکی از کپه‌ها را خورد یا یک شکلات را از یک کپه به دیگری منتقل کرد. بازیکنی که نتواند حرکت کند بازی را می‌برد.

۳۶. بازیکن اول یکی از رقمهای ۶، ۷، ۸ و ۹ را روی تخته‌سیاه می‌نویسد. در هر حرکت بعدی می‌توان یکی از همین رقمها را در سمت راست عدد روی تخته‌سیاه نوشت. بازی پس از الف) ۱۰؛ ب) ۱۲ حرکت خاتمه می‌یابد (توجه کنید که مثلاً دهمین حرکت، حرکت پنجم بازیکن دوم است). اگر عدد حاصل بر ۹ بخش‌پذیر نبود بازیکن اول می‌برد و در غیر این صورت می‌بازد.

۳۷. دو بازیکن روی صفحهٔ شطرنجی نامتناهی بازی می‌کنند. بازیکن اول در یکی از خانه یک علامت بعلاوه می‌گذارد. او در هر حرکت بعدی باید در یکی از خانه‌های خالی‌ای که ضلعی مشترک با یکی از خانه‌هایی که قبلاً در آن علامت بعلاوه گذاشته شده، علامت بعلاوه بگذارد. ثابت کنید صرف‌نظر از اینکه بازیکن اول چگونه بازی کند، بازیکن دوم می‌تواند او را «پات کند» ـ یعنی می‌تواند وضعی را پیش بیاورد که بازیکن اول نتواند حرکت دیگری کند.

۳۸. ۱۰۰۱ چوب کبریت روی هم کپه شده است. در هر حرکت می‌توان p^n چوب کبریت را از این کپه برداشت، که در اینجا p عددی اول است و n عددی صحیح و غیرمنفی است. بازیکنی که آخرین چوب کبریت را برمی‌دارد بازی را می‌برد.

۳۹. ۱۹۹۱ میخ روی تخته‌ای کوبیده شده است. در هر حرکت می‌توان دو تا از میخها را که به هم وصل نیستند با سیمی به هم وصل کرد. اگر پس از حرکتی مسیری بسته تشکیل شد، بازیکنی که این حرکت را کرده است بازی را الف) می‌برد؛ ب) می‌بازد.

۴۰. در هر حرکت می‌توان یکی از خانه‌های جدولی با ابعاد الف) ۹۱×۱۹؛ ب) ۹۲×۱۹ یا تعدادی از خانه‌ها را که مربعی را تشکیل می‌دهند سیاه کرد. نمی‌توان خانه‌ای را دو بار رنگ کرد. بازیکنی که آخرین خانه را رنگ کند بازی را می‌برد.

*۴۱. کاغذی شطرنجی به ابعاد ۴۵×۳۰ مفروض است. در هر حرکت می‌توان از روی پاره‌خطی که دوتا از نقطه‌های شبکه‌ای مجاور را به هم وصل می‌کند کاغذ را برید. بازیکن اول بازی را با برش از لبهٔ کاغذ شروع می‌کند. هر برش باید از جایی که برش قبلی تمام شده شروع شود. بازیکنی که پس از حرکت او کاغذ دو تکه شود برنده است.

*۴۲. پادشاه، در نوبتش، می‌تواند دو ضربدر در هر دو خانهٔ خالی دلخواهش روی صفحهٔ شطرنجی نامتناهی بگذارد. پیشکارش، در نوبتش، می‌تواند یک شیرینی در هر خانهٔ خالی‌ای که بخواهد بگذارد. آیا پادشاه می‌تواند ۱۰۰ ضربدر پشت سر هم در یک ردیف (عمودی یا افقی) بگذارد؟

۴. مسأله‌های ساختنی

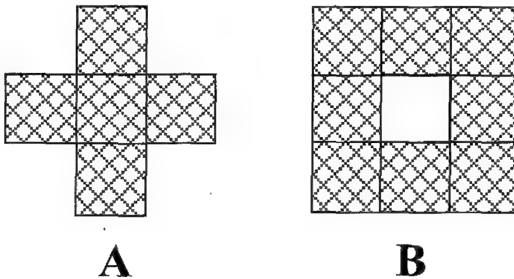
۴۳. مسافری زنجیری طلا دارد که ۷ قطعه دارد و می‌خواهد در هتلی اتاق بگیرد. مسافر باید هر قطعه از زنجیر را برای کرایهٔ هر روز بدهد. کمترین تعداد قطعه‌هایی که مسافر باید باز کند تا کرایهٔ هر روز را دقیقاً بدهد چقدر است؟

۴۴. آیا می‌توان ۱۰ عدد را در یک سطر طوری نوشت که مجموع هر پنج عدد متوالی از آنها مثبت و مجموع هر هفت عدد متوالی از آنها منفی باشد؟

۴۵. عددی ده‌رقمی پیدا کنید که رقم اولش برابر با تعداد صفرهای نمایش اعشاری آن باشد، رقم دومش برابر با تعداد یکها در این نمایش باشد، . . . و رقم دهمش برابر با تعداد نه‌ها در این نمایش باشد.

۴۶. علی‌بابا می‌خواهد به درون غار برود. در دهانهٔ غار بشکه‌ای وجود دارد. این بشکه چهار حفره دارد که درون هر یک از آنها سبویی وجود دارد و درون هر سبو یک شاه‌ماهی. هر شاه‌ماهی می‌تواند در سبو سر پایین یا سر بالا بنشیند. علی‌بابا می‌تواند دستش را در دو تا از سوراخها کند و پس از اینکه وضعیت نشستن شاه‌ماهیها را تشخیص داد، آنها را هر طور که خواست تغییر دهد. پس از این کار بشکه می‌چرخد و پس از اینکه باز ایستاد نمی‌تواند حفره‌ها را از هم تشخیص دهد. دهانهٔ غار وقتی و فقط وقتی باز می‌شود که همهٔ شاه‌ماهیها به یک طریق نشسته باشند. علی‌بابا چگونه می‌تواند داخل غار شود؟

۴۷. راهی برای رنگ کردن کاغذی شطرنجی با ۵ رنگ طوری پیدا کنید که رنگ خانه‌های هر شکلی از نوع A (شکل ۱۲۴ را ببینید) مختلف باشد، اما در مورد هیچ شکلی مانند B چنین نباشد.



شکل ۱۲۴

* * *

۴۸. شکلی رسم کنید که نیمدایره‌ای به شعاع ۱ را نپوشاند، اما بتوان با دو نسخه از آن دایره‌ای به شعاع ۱ را پوشاند.

۴۹. شش نقطه در صفحه طوری پیدا کنید که هر سه تا از آنها رأسهای مثلثی متساوی‌الاضلاع باشند.

۵۰. ۱۱ مربع جدا از هم (یعنی، مربعهایی که هیچ نقطهٔ درونی مشترکی ندارند) طوری در صفحه رسم کنید که نتوان آنها را با ۳ رنگ به طور مناسب رنگ کرد. رنگ‌آمیزی مجموعه‌ای از شکلها را مناسب می‌نامیم، هرگاه هر دوشکل که بیش از یک نقطهٔ مشترک مرزی دارند رنگشان فرق داشته باشد.

۵۱. صفحه را با مربعهای ناهمپوشان طوری بپوشانید که فقط دو تا از آنها به یک اندازه باشند.

۵۲. یک چندضلعی و نقطه‌ای در صفحه طوری رسم کنید که هیچ‌یک از ضلعهای چندضلعی از این

نقطه کاملاً قابل رؤیت نباشد (یعنی، اگر چشم بیننده در این نقطه قرارگیرد، هر ضلع چندضلعی را که در نظر بگیریم، ضلعی دیگر جلوی دیدن آن را گرفته باشد). دو حالت وجود دارد: الف) نقطهٔ موردنظر درون چندضلعی باشد؛ ب) نقطهٔ موردنظر بیرون چندضلعی باشد.

*۵۳. هفت نقطه روی صفحه طوری پیدا کنید که در میان هر سه تا از آنها دو نقطه به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر وجود داشته باشد.

۵. هندسه

مجموعهٔ ۱. نابرابریهای هندسی

در فصل «هندسه» چند نابرابری هندسی و مسأله‌های مربوط به آنها را بررسی کردیم. در این مجموعه، چند مسأله از این موضوع گرد آورده‌ایم که دشوارتر و نامتعارف‌ترند.

۵۴. ثابت کنید دایره‌هایی که به قطر ضلعهای مثلث رسم می‌شوند کل مثلث را می‌پوشانند.

۵۵. ثابت کنید دایره‌هایی که به قطر ضلعهای چهارضلعی رسم می‌شوند کل چهارضلعی را می‌پوشانند.

۵۶. ثابت کنید چندضلعی محدب بیشتر از سه زاویهٔ حاده ندارد.

۵۷. ثابت کنید در چندضلعی محدب، مجموع هر دو زاویه از تفاضل هر دو زاویهٔ دیگر بیشتر است.

۵۸. دایره‌ای به شعاع ۱ و پنج خط راست که این دایره را قطع کرده‌اند در صفحه مفروض‌اند. می‌دانیم که فاصلهٔ نقطهٔ X از مرکز دایره ۱۱٫۱ است. ثابت کنید اگر قرینهٔ نقطهٔ X را به‌طور متوالی نسبت به پنج خط پیدا کنیم، نقطهٔ حاصل درون دایره نمی‌افتد.

۵۹. ستاره‌شناس ۵۰ ستاره را رصد کرده است که فاصلهٔ میان هر دو تا از آنها برابر با S است. ابری ۲۵ تا از ستاره‌ها را پوشانده است. ثابت کنید مجموع فاصله‌های دو به دو ستاره‌های قابل رؤیت از $\frac{S}{۲}$ کمتر است.

۶۰. مربعی ۱ × ۱ را به چند مستطیل تقسیم کرده‌ایم. در مورد هر یک از آنها نسبت عرض به طول را حساب کرده‌ایم. ثابت کنید مجموع این نسبتها از ۱ بیشتر نیست.

۶۱. رأسهای مثلث ABC در نقطه‌های شبکه‌ای صفحه‌ای شطرنجی (که طول ضلع خانه‌هایش برابر با واحد است) قرار دارند. می‌دانیم $|AB| > |AC|$. ثابت کنید $|AB| - |AC| > \frac{1}{p}$، که در اینجا p نصف محیط مثلث ABC است.

مجموعهٔ ۲. هندسهٔ ترکیبیاتی

در این بخش مسأله‌هایی از «هندسهٔ ترکیبیاتی» آورده‌ایم. در این شاخه از هندسه ویژگیهای ترکیبیاتی مختلف آرایشهای شکلهای هندسی، نظیر نقطه‌ها، خطها، چندضلعیها، و از این قبیل، در صفحه (و در فضا) بررسی می‌شوند. تحدب نیز معمولاً در این مبحث گنجانده می‌شود.

۶۲. ۲۰۰ نقطه روی پاره‌خط AB طوری انتخاب شده‌اند که این مجموعه نسبت به وسط پاره‌خط AB متقارن است. صدتا از نقطه‌ها قرمز و بقیه آبی شده‌اند. ثابت کنید مجموع فاصله‌های A تا نقطه‌های قرمز برابر است با مجموع فاصله‌های B تا نقطه‌های آبی.

۶۳. پنج نقطه در صفحه مفروض‌اند و هیچ سه تایی از آنها روی یک خط راست قرار ندارند. ثابت کنید چهارتا از این نقطه‌ها رأسهای چهارضلعی‌ای محدب‌اند.

۶۴. مربعی ۲ × ۲ به چند مستطیل تقسیم شده است. ثابت کنید می‌توانیم برخی از این مستطیلها را طوری با سیاه رنگ کنیم که طول تصویر شکلهای رنگ شده بر یکی از ضلعهای مربع از ۱ بیشتر نباشد در حالی که طول همین تصویر بر ضلع دیگر از ۱ کمتر نباشد.

۶۵. شش سکهٔ ده‌تومانی روی میز، زنجیری بسته تشکیل داده‌اند. سکهٔ ده‌تومانی هفتمی بی‌آنکه «بلغزد» طوری می‌چرخد که بر هر شش سکه مماس می‌شود. پیش از اینکه این سکه به جای اولش بازگردد چند دور کامل می‌زند؟

۶۶. خط شکستهٔ بستهٔ ۸ـتکه‌ایی که رأسهایش بر رأسهای مکعبی منطبق‌اند در فضا مفروض است. ثابت کنید یکی از این تکه‌ها بر یکی از یالهای مکعب منطبق است.

*۶۷. چند پاره‌خط روی خطی راست مفروض‌اند و می‌دانیم که هر دوتا از آنها یکدیگر را قطع کرده‌اند. ثابت کنید نقطه‌ای از خط به همهٔ این پاره‌خطها تعلق دارد.

۶۸. چند پاره‌خط بازهٔ [۰, ۱] را پوشانده‌اند. ثابت کنید می‌توانید چندتا از این پاره‌خطها را طوری انتخاب کنید که جدا از هم باشند و مجموع طولهایشان دست‌کم $\frac{1}{2}$ باشد.

*۶۹. چند پاره‌خط روی بازهٔ [۰, ۱] قرار دارند و آن را پوشانده‌اند. ثابت کنید نیمهٔ چپ آنها دست‌کم نیمی از بازهٔ [۰, ۱] را می‌پوشانند.

۶. عددهای صحیح

۷۰. همهٔ عددهای طبیعی را پیدا کنید که برابر با مجموع فاکتوریلهای رقمهایشان هستند.

۷۱. عدد $\overline{abc}$ اول است. ثابت کنید ممکن نیست $b^2 - 4ac$ مربع کامل باشد.

۷۲. توان چهارم عددی طبیعی با رقمهای ۰، ۱، ۴، ۶، ۷ و ۹ نوشته شده است. این عدد را پیدا کنید.

۷۳. کوچکترین عدد طبیعی به شکل ۱۱...۱۱۱ که بر ۳۳...۳۳۳ (صدتا ۳) بخش‌پذیر است، کدام است؟

۷۴. ثابت کنید می‌توان از میان هر ۳۹ عدد طبیعی متوالی عددی را پیدا کرد که مجموع رقمهایش بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۷۵. آیا دو عدد هفت رقمی مختلف وجود دارد که هر کدام با رقمهای ۱، ۲، ... و ۷، بدون تکرار، نوشته شده باشد و یکی از آنها بر دیگری بخش‌پذیر باشد؟

۷۶. تفاضل دو عدد $\overline{abcdef}$ و $\overline{fdebca}$ بر ۲۷۱ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $b = d$ و $c = e$.

۷۷. آیا عددی دو رقمی وجود دارد که مربعش هم به همین دو رقم، منتها به ترتیب عکس، ختم شود؟

۷۸. عددهای صحیح a، b و c مفروض‌اند و می‌دانیم که به ازای هر عدد صحیح مانند x، ax^2+bx+c بر ۵ بخش‌پذیر است. ثابت کنید a، b و c خودشان هم بر ۵ بخش‌پذیرند.

۷۹. همهٔ عددهای طبیعی مانند n را طوری پیدا کنید که عدد $n^n + 1$ اول باشد و حداکثر ۱۹ رقم داشته باشد.

*۸۰. عدد y با تجدید آرایش رقمهای عدد x به‌دست آمده است. می‌دانیم $x + y = 10^{200}$. ثابت کنید x بر ۵۰ بخش‌پذیر است.

*۸۱. ثابت کنید ممکن نیست عدد $\overline{a000\ldots00b}$ مربع کامل باشد.

۷. مسأله‌های بهینه‌سازی

مجموعهٔ ۱. اصل اکسترمم

ایدهٔ اصلی برای حل کردن مسأله‌های این مجموعه در نظرگرفتن چیزی (به هر تعبیری) «اکسترمم» است: بزرگترین عدد، دو نقطه که بیشترین فاصله را از هم دارند، کوچکترین زاویه، و چیزهایی از این قبیل.

۸۲. الف) روی رأسهای ۱۰۰ضلعی عددهایی نوشته‌ایم، به‌طوری که هر یک از آنها میانگین حسابی همسایگانش است. ثابت کنید همهٔ این عددها برابرند.

ب) همین حکم را ثابت کنید، به شرطی که این بار عددها درون خانه‌های صفحهٔ شطرنجی نوشته شده‌اند و می‌دانیم هیچ‌یک از آنها از میانگین حسابی همسایگانش بیشتر نیست.

راه‌حل مسألهٔ ۸۲ (الف) نسبتاً ساده است. کوچکترین عدد را در نظر بگیرید. معلوم است که همسایگانش باید با خودش برابر باشند ـ در غیر این صورت، میانگین حسابی آنها باید از کوچکترین عدد موردنظر بیشتر باشد. به‌همین ترتیب، همسایگان این دو عدد هم باید با خودشان برابر باشند، و همین‌طور تا آخر. یعنی همهٔ عددها باید برابر باشند.

۸۳. ده نقطه روی صفحه مفروض‌اند. ثابت کنید می‌توان پنج پاره‌خط جدا از هم پیدا کرد که دو سرشان از این نقطه‌ها باشند.

۸۴. آیا می‌توان چند پاره‌خط در صفحه طوری رسم کرد، که دو سر هر یک از آنها نقطهٔ درونی یکی دیگر از پاره‌خطهای رسم شده باشد؟

۸۵. چند سکه روی پیشخوان صرافی قرار دارد، به‌طوری که سکه‌ها با هم تماس ندارند. دزد بی‌دستی می‌خواهد یکی از این سکه‌ها را با بینی‌اش تا لبهٔ میز هل دهد، تا در آنجا آن را به چنگ آورد.

سکه‌ای که حرکت می‌کند نباید به سکهٔ دیگری بخورد (مبادا که صراف صدایش را بشنود). آیا همواره چنین کاری ممکن است؟

۸۶. الف) چند سکهٔ یکجور روی میز قرار دارد. ثابت کنید یکی از این سکه‌ها حداکثر با سه‌تای دیگر تماس دارد.

ب) چند سکه با اندازه‌های مختلف روی میز قرار دارد. ثابت کنید یکی از این سکه‌ها حداکثر با پنج‌تای دیگر تماس دارد.

۸۷. کشوری چندین فرودگاه دارد و می‌دانیم که فاصله‌های میان آنها متمایز است. از هر فرودگاه هواپیمایی بلند می‌شود و در نزدیکترین فرودگاه به آن می‌نشیند. ثابت کنید پس از اینکه همهٔ هواپیماها نشستند، در هر فرودگاه حداکثر پنج‌تا از این هواپیماها ممکن است وجود داشته باشد.

۸۸. در فضاهای دور ۱۹۹۱ سیارک وجود دارد و در هر یک از آنها ستاره‌شناسی زندگی می‌کند. فاصله‌های میان همهٔ سیارکها متمایز است. هر ستاره‌شناس نزدیکترین سیارک به خودش را می‌بیند. ثابت کنید سیارکی وجود دارد که قابل رؤیت نیست.

مجموعهٔ ۲. نیم‌ـناورداها

ایدهٔ «نیم‌ـناوردا» تعمیم طبیعی ایدهٔ ناورداهاست. کمیتی را «نیم‌ـناوردا» می‌نامیم که ضمن فرایند تبدیل به‌طور یکنوا تغییر کند. نمونهٔ بارز نیم‌ـناوردا، عمر انسانهاست، که متأسفانه با گذشت زمان فقط کم می‌شود.

۸۹. کشوری چندین شهر دارد. بزه‌کاری از شهر A به شهر B، که دورترین شهر کشور به A است، تبعید می‌شود. پس از مدتی او دوباره از شهر B به دورترین شهر به B، که A نیست، تبعید می‌شود. ثابت کنید اگر به همین ترتیب پی‌درپی تبعید شود، هیچ‌گاه به شهر A باز نمی‌گردد.

۹۰. صد سکه در یک ردیف به این ترتیب چیده شده‌اند: رو، پشت، رو، پشت، .... در هر حرکت می‌توان چند سکهٔ متوالی را پشت و رو کرد. کمترین تعداد حرکتهای لازم برای اینکه به وضعیتی برسیم که همهٔ سکه‌ها به رو باشند چقدر است؟

۹۱. در نیمه‌شب یک ویروس در اجتماع ۱۹۸۴ باکتری قرار داده می‌شود. هر ویروس در هر ثانیه یک باکتری را از بین می‌برد، و پس از آن باکتریها و ویروسها به دو نیم می‌شوند. ثابت کنید سرانجام همهٔ باکتریها از بین می‌روند و زمان دقیق این رخداد را تعیین کنید.

۹۲. در هر خانهٔ جدولی مستطیلی یک عدد حقیقی نوشته‌ایم. می‌توانیم علامت همهٔ عددهای هر یک از سطرها یا هر یک از ستونها را عوض کنیم. ثابت کنید با این کارها می‌توانیم ترتیبی دهیم که مجموع عددهای نوشته در جدول غیرمنفی شود.

*۹۳. درگرافی n رأسی درجهٔ هیچ رأسی از پنج بیشتر نیست. ثابت کنید می‌توان رأسهای این گراف را با سه رنگ طوری رنگ کرد که تعداد یالهایی که دو سرشان همرنگ‌اند حداکثر $\frac{n}{2}$ باشد.

*۹۴. روی دایره‌ای عددهایی حقیقی نوشته‌ایم. اگر چهار عدد پشت سرهم a، b، c و d در نابرابری $(a-d)(b-c)>0$ صدق کنند، می‌توانیم جای عددهای b و c را عوض کنیم. ثابت کنید نمی‌توان بی‌نهایت بار چنین جایگشتهایی انجام داد.

۸. پیوستگی گسسته

در اینجا مسأله‌هایی را گرد آورده‌ایم که راه‌حلشان بر اساس ایده‌ای بسیار ساده است که آن را با مثال زیر توضیح می‌دهیم. کَکی روی خط حقیقی روی عددهای صحیح می‌پرد. می‌دانیم که کک در هر پرش حداکثر به یکی از عددهای مجاورش می‌رود. اگر این کک ابتدا روی عددی منفی نشسته باشد و در انتها روی عددی مثبت، در لحظه‌ای روی صفر نشسته بوده است.

۹۵. ۱۰۰ نقطه روی صفحه انتخاب کرده‌ایم. ثابت کنید خطی وجود دارد که دقیقاً پنجاه تا از این نقطه‌ها در یک طرف آن قرار دارند.

راه‌حل مسألهٔ ۹۵ را بررسی می‌کنیم. ابتدا همهٔ خطهای راستی را رسم می‌کنیم که از هر جفت از این ۱۰۰ نقطه می‌گذرند. بعد خطی را پیدا می‌کنیم که با هیچ‌یک از این خطها موازی نیست و همهٔ نقطه‌های موردنظر در یک طرف آن قرار دارند. اکنون این خط را به سمت نقطه‌ها طوری حرکت می‌دهیم که همواره موازی وضعیت اولیه‌اش باشد و توجه می‌کنیم که تعداد نقطه‌هایی که این خط از آنها رد می‌شود چگونه تغییر می‌کند. کاملاً واضح است که امکان ندارد همزمان از دو نقطه رد شویم. بنابراین با همان «پیوستگی گسسته» مواجهیم که در مثال مربوط به کک بودیم. چون در ابتدا هیچ‌یک از نقطه‌های انتخاب شده در یک طرف خط موردنظر نیست و در انتها هر ۱۰۰ نقطه در همین طرف خط قرار دارند، پس معلوم است که در لحظه‌ای تعداد نقطه‌هایی که خط از آنها رد شده برابر با ۵۰ است، و نتیجه‌ای که می‌خواهیم به‌دست می‌آید.

۹۶. صد توپ سیاه و صد توپ قرمز در یک ردیف طوری چیده شده‌اند که توپهای واقع در انتهای سمت چپ و انتهای سمت راست سیاه‌اند. ثابت کنید می‌توان چند توپ متوالی (البته نه همهٔ توپها را!) از سمت چپ این ردیف طوری انتخاب کرد که تعداد توپهای سیاه و قرمز در میان آنها برابر باشد.

۹۷. بازی فوتبال میان تیمهای پیروزی و استقلال با نتیجهٔ ۸ بر ۵ خاتمه یافته است. ثابت کنید هنگام بازی زمانی بوده است که پیروزی به امتیازی که استقلال در این لحظه داشته، رسیده بوده است.

۹۸. ثابت کنید می‌توانید رقمهای عددی شش رقمی را طوری از نو مرتب کنید که تفاضل میان مجموع سه رقم اولش و سه رقم آخرش عددی بین ۰ و ۹ باشد.

۹۹. در خانه‌های جدولی ۸ × ۸ عددهای ۱+ و ۱− را به‌گونه‌ای نوشته‌ایم که مجموع همهٔ عددها برابر با صفر شده است. ثابت کنید می‌توان این جدول را به دو بخش طوری تقسیم کرد که مجموع عددهای هر بخش برابر با صفر باشد.

۱۰۰. وجه‌های هشت مکعب واحد را با رنگهای سیاه و سفید طوری رنگ کرده‌ایم که تعداد وجه‌های سیاه و وجه‌های سفید برابر شده است. ثابت کنید می‌توان با این مکعبهای واحد، مکعبی ۲ × ۲ × ۲ طوری درست کرد که تعداد مکعبهای سفید و مکعبهای سیاه روی سطح آن برابر باشد.

۱۰۱. در برخی خانه‌های جدولی ۵۰ × ۵۰ عددهای ۱+ و ۱− را قرار داده‌ایم و می‌دانیم که قدرمطلق مجموعشان از ۱۰۰ بیشتر نیست. ثابت کنید جدولی ۲۵ × ۲۵ وجود دارد که قدرمطلق مجموع عددهای نوشته شده روی آن از ۲۵ بیشتر نیست.

*۱۰۲. دربارهٔ دنبالهٔ (a_n) می‌دانیم ۱ = a_1 و همواره $a_{n+1} - a_n$ یا ۰ است یا ۱. همچنین، می‌دانیم که به ازای عددی طبیعی مانند n، $a_n = \frac{n}{1000}$. ثابت کنید به‌ازای عددی طبیعی مانند m، $a_m = \frac{m}{500}$.

۹. سؤالهای قدرتی

این بخش به «سؤالهای قدرتی» اختصاص دارد. هر یک از این سؤالها در حقیقت زنجیره‌ای از مطالب ساده‌تر (لمها) است که در کل به حل مسأله‌ای دشوارتر منجر می‌شوند. ابتدا نتیجهٔ موردنظر و سپس لمهایی را که باید ثابت کنید تا مسأله را حل کنید می‌آوریم. برخی از این مسأله‌ها برای تمرین در منزل خیلی مفیدند و برخی را می‌توان در جلسات ویژه‌ای بررسی کرد.

۱۰۳. مثلثهای متساوی‌الاضلاع روی کاغذهای شطرنجی. ثابت کنید مثلثی متساوی‌الاضلاع که رأسهایش در نقطه‌های شبکه‌ای صفحهٔ شطرنجی قرار داشته باشند وجود ندارد.

الف) ثابت کنید دو برابر مساحت هر مثلثی که رأسهایش در نقطه‌های شبکه‌ای صفحهٔ شطرنجی قرار دارند عددی طبیعی است.

ب) طول ارتفاع مثلثی متساوی‌الاضلاع به‌طول ضلع a را پیدا کنید و مساحتش را حساب کنید.

ج) ثابت کنید مربع طول هر پاره‌خطی که دو سرش در دو نقطهٔ شبکه‌ای قرار دارند عددی طبیعی است.

د) ثابت کنید اگر مثلثی متساوی‌الاضلاع وجود داشته باشد که رأسهایش در نقطه‌های شبکه‌ای قرار دارند، آن‌وقت می‌توان $\sqrt{3}$ را به شکل نسبت دو عدد طبیعی نوشت.

ه) ثابت کنید اگر مربع کسری که صورت و مخرجش نسبت به هم اول‌اند عددی طبیعی باشد، آن‌وقت مخرجش برابر با ۱ است.

و) اکنون حکم مسأله را ثابت کنید.

۱۰۴. **دستور پیک.** ثابت کنید مساحت چندضلعی‌ای که رأسهایش در نقطه‌های شبکه‌ای صفحهٔ شطرنجی قرار دارند برابر است با $a + \frac{b}{۲} - ۱$، که در آن a تعداد نقطه‌های شبکه‌ای درون چندضلعی و b تعداد نقطه‌های شبکه‌ای روی محیط چندضلعی است.

الف) دستور پیک را در مورد مستطیلی که ضلعهایش روی خطهای کاغذ شطرنجی قرار دارند ثابت کنید.

ب) دستور پیک را در مورد مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ضلعهایش روی خطهای کاغذ شطرنجی قرار دارند ثابت کنید.

ج) دستور پیک را در مورد چندضلعی‌ای که می‌توان آن را به چندضلعیهایی که دستور پیک در مورد آنها درست است ثابت کنید.

د) فرض کنید چندضلعی‌ای داریم که دستور پیک در مورد آن درست است و این چندضلعی را به دو چندضلعی کوچکتر تقسیم کرده‌ایم. ثابت کنید اگر دستور پیک در مورد یکی از این چندضلعیهای کوچکتر درست باشد، در مورد دیگری هم درست است.

ه) ثابت کنید دستور پیک در مورد هر مثلثی که رأسهایش در نقطه‌های شبکه‌ای کاغذ شطرنجی قرار دارند درست است.

و)* ثابت کنید هر چندضلعی را می‌توان با ترسیم قطرهایی جدا از هم از آن به مثلثهایی تقسیم کرد (مسألهٔ ۳۱ فصل «استقرا» را ببینید).

ز) دستور پیک را در حالت کلی ثابت کنید.

۱۰۵. **قضیهٔ بویایی ـ گروین.** دو چندضلعی با مساحت برابر مفروض‌اند. ثابت کنید می‌توان چندضلعی اول را به چند بخش طوری تقسیم کرد و آنها را از نو طوری چید تا چندضلعی دوم را به‌دست آورد. دو شکل که می‌توان آنها را به هم تبدیل کرد «یکجور» می‌نامیم.

الف) ثابت کنید دو متوازی‌الاضلاع که قاعده‌ای مشترک و ارتفاعی برابر دارند یکجورند.

ب) ثابت کنید اگر چندضلعیهای $P_۱$ و $P_۲$ یکجور باشند و نیز بدانیم $P_۲$ و $P_۳$ یکجورند، آن‌وقت $P_۱$ و $P_۳$ هم یکجورند.

ج) ثابت کنید هر دو متوازی‌الاضلاع که مساحتشان برابر است یکجورند.

د) ثابت کنید هر مثلث با متوازی‌الاضلاعی یکجور است.

ه) ثابت کنید هر مثلث با مستطیلی که طول یکی از ضلعهایش ۱ است یکجور است.

و) قضیهٔ بویای ـ گروین را ثابت کنید.

۱۰۶. **بخش‌پذیری عددهای فیبوناتچی.** ثابت کنید اگر F_n (nامین عدد فیبوناتچی) اول باشد، آن‌وقت $n = ۴$ یا n اول است.

الف) ثابت کنید (به استقرا) که به ازای هر دو عدد طبیعی مانند m و n،

$$F_{m+n} = F_{m+۱}F_n + F_mF_{n-۱}$$

ب) ثابت کنید F_{km} بر F_m بخش‌پذیر است (از استقرا روی k استفاده کنید).
ج) ثابت کنید اگر n بر عددی بزرگتر از ۲ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت F_n مرکب است.
د) ثابت کنید هر عدد مرکب غیر ۴ مقسوم‌علیهی سره و بزرگتر از ۲ دارد، و راه‌حل مسأله را کامل کنید.

۱۰۷. قضیهٔ هلّی. روی صفحه چند مجموعهٔ محدب وجود دارد و می‌دانیم که هر سه‌تا از آنها نقطه‌ای مشترک دارند. ثابت کنید همهٔ این مجموعه‌ها نقطه‌ای مشترک دارند.
الف) چهار نقطه که با مجموعه عددهای {۱, ۲, ۳}، {۱, ۲, ۴}، {۲, ۳, ۴} و {۱, ۳, ۴} برچسب خورده‌اند در صفحه مفروض‌اند. می‌توان هر دوتا از این نقطه‌ها را با پاره‌خطی به‌هم وصل کرد و همهٔ نقطه‌های این پاره‌خط را با عددهایی که میان مجموعه‌های برچسبهای دو سر آن مشترک‌اند برچسب زد. ثابت کنید با این کار می‌توان نقطه‌ای را پیدا کرد که با هر چهار عدد ۱، ۲، ۳ و ۴ برچسب خورده باشد.
ب) ثابت کنید اشتراک مجموعه‌های محدب، محدب است.
ج) قضیهٔ هلّی را در مورد چهار مجموعهٔ محدب ثابت کنید؛ به یاد داشته باشید که باید فرض کنید که هر سه‌تا از آنها نقطه‌ای مشترک دارند.
د) حالت کلی قضیهٔ هلّی را به استقرا روی تعداد مجموعه‌های محدب ثابت کنید.

۱۰. گوناگون

۱۰۸. خانه‌های جدولی ۹ × ۹ با دو رنگ، رنگ شده‌اند. می‌توان هر مستطیل ۱ × ۳ای را انتخاب کرد و همهٔ خانه‌هایش را با رنگی که بیشتر روی این مستطیل به چشم می‌آید رنگ کرد. ثابت کنید با این کارها می‌توان به جایی رسید که همهٔ خانه‌ها به یک رنگ باشند.

۱۰۹. آیا ممکن است شش تفاضل میان عددهای مجموعه‌ای چهارعضوی برابر با ۲، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ باشند؟

۱۱۰. در روستایی ۱۹۷۰ نفر زندگی می‌کنند. هر روز برخی از آنها یک سکهٔ ده‌تومانی را با دو سکهٔ پنج‌تومانی افراد دیگری عوض می‌کنند. آیا ممکن است در طول یک هفته هر یک از افراد این روستا دقیقاً ۱۰ سکه دست به دست کرده باشد؟

۱۱۱. پیت، پال و ماری مسأله‌های کتابی را حل می‌کنند. هر یک از آنها دقیقاً ۶۰ مسأله را حل می‌کند، اما روی هم فقط ۱۰۰ مسأله را حل کرده‌اند. مسألهٔ «ساده» مسأله‌ای است که هر سه آنها حلش کرده‌اند و مسألهٔ «دشوار» مسأله‌ای است که فقط یکی از آنها حلش کرده است. ثابت کنید تعداد مسأله‌های دشوار از تعداد مسأله‌های ساده ۲۰ تا بیشتر است.

۱۱۲. می‌دانیم که نمایش اعشاری مربع عدد x به‌شکل ...۹۹...۰٫۹۹۹ (صدتا ۹ پس از ممیز)

است. ثابت کنید نمایش اعشاری خود عدد x نیز به همین شکل است (البته، ممکن است تعداد ۹ها در آن فرق کند).

۱۱۳. چهل و نه رخ روی صفحهٔ شطرنجی ۱۰۰×۱۰۰ قرار دارند و یک مهرهٔ شاه درگوشهٔ پایین، سمت چپ گذاشته‌ایم. شاه به سمت گوشهٔ بالا، سمت راست حرکت می‌کند و پس از هر حرکتش یکی از رخها هم حرکت می‌کند. ثابت کنید لحظه‌ای وجود دارد که یکی از رخها شاه را تهدید می‌کند.

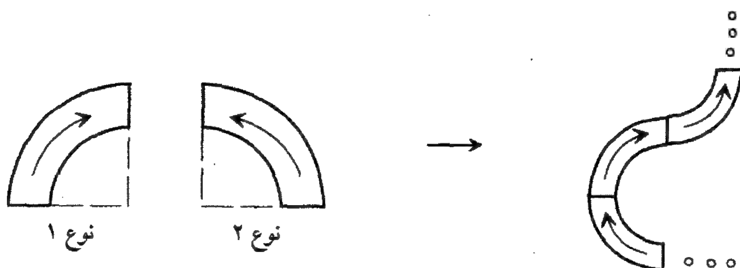
۱۱۴. در عدد ...۰٫۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱ همهٔ عددهای طبیعی پشت سر هم بعد از ممیز نوشته شده‌اند. آیا این کسر متناوب است؟

۱۱۵. سه بازیکن، تنیس بازی می‌کنند وکسی که در بازی‌ای شرکت ندارد با برندهٔ این بازی در بازی بعد بازی می‌کند. در انتهای روز بازیکن اول ۱۰ بار بازی کرده است و بازیکن دوم ۲۱ بار. بازیکن سوم چند بار بازی کرده است؟

۱۱۶. دربارهٔ عددهای x و y می‌دانیم $\sqrt{x} - \sqrt{y} = ۱۰$. ثابت کنید $x - ۲y < ۲۰۰$.

۱۱۷. همهٔ خانه‌های نیمهٔ چپ جدولی ۱۰×۱۰ با سیاه و بقیهٔ خانه‌ها با سفید رنگ شده‌اند. می‌توان رنگ همهٔ خانه‌های هر سطر یا هر ستون را عوض کرد. آیا می‌توان فقط با این کارها به رنگ‌آمیزی معمول صفحهٔ شطرنج دست یافت؟

۱۱۸. یکی از اسباب‌بازیهای کودکان از چند ریل قطار از دو نوع مختلف (شکل ۱۲۵ را ببینید) تشکیل شده که دوری بسته را تشکیل داده‌اند و جهت حرکت قطار با جهت فلشها یکی است. یکی از قطعه‌های از نوع ۱ جدا می‌شود و قطعهٔ دیگری از نوع ۲ به‌جای آن گذاشته می‌شود. ثابت کنید که دیگر نمی‌توان همهٔ قطعه‌ها را طوری چید که دور بسته ایجاد شود.



شکل ۱۲۵

۱۱۹. شهری به شکل چندضلعی‌ای محدب است که قطرهایش خیابانهای شهرند. نقطه‌های برخورد قطرها و رأسهای چندضلعی تقاطعها هستند. خطهای تراموایی از برخی خیابانها می‌گذرند و می‌دانیم که از هر تقاطع دست‌کم یک خط می‌گذرد. ثابت کنید می‌توان با حداکثر دو بار عوض کردن خطها، از هر تقاطع به هر تقاطع دیگر رفت.

۱۲۰. سه شهر به ترتیب ۱۰۰، ۲۰۰ و ۳۰۰ دانش‌آموز دارند. مدرسه را باید کجا ساخت تا مجموع مسافتهایی که دانش‌آموزان در روز طی می‌کنند کمترین مقدار ممکن باشد؟

۱۲۱. آیا می‌توان ۱۷ضلعی منتظمی را به ۱۴ مثلث تقسیم کرد؟

۱۲۲. سه گربه در سه رأس مربعی نشسته‌اند. این گربه‌ها از روی هم می‌پرند، یکی از روی دیگری. اگر گربهٔ A از روی گربهٔ B بپرد، روی نقطه‌ای مانند A' فرود می‌آید که B وسط پاره‌خط AA' باشد. آیا ممکن است که یکی از آنها به رأس چهارم مربع بپرد؟

۱۲۳. بیست و پنج فیل در یک ردیف در یک سیرک ایستاده‌اند و وزن هر یک بر حسب کیلوگرم عددی طبیعی است. می‌دانیم که اگر وزن هر یک از آنها را (بجز فیلی که انتهای ردیف در سمت راست ایستاده) با نصف وزن فیل سمت راستش جمع کنیم، حاصل برابر با ۶ تن می‌شود. وزن فیلها را پیدا کنید.

۱۲۴. میز بیلیاردی به ابعاد ۱۰۱×۲۰۰ فقط چهار سوراخ در چهارگوشه‌اش دارد. توپی از گوشهٔ میز در امتداد نیمساز آن زده می‌شود و حرکت می‌کند و از ضلعهای میز منعکس می‌شود. آیا ممکن است به یکی از سوراخها بیفتد؟

۱۲۵. قطرهای ۱۳ضلعی‌ای محدب آن را به چند ناحیه تقسیم کرده‌اند. تعداد ضلعهای این ناحیه‌ها حداکثر چقدر است؟

۱۲۶. ثابت کنید اگر n عددی طبیعی و بزرگتر از ۱ باشد، آن‌وقت عدد

$$۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{n}$$

عددی صحیح نیست.

۱۲۷. شعاع دایره‌ای روی صفحهٔ شطرنج که هیچ خانهٔ سفید را (بجز در رأسهایش) قطع نمی‌کند حداکثر چقدر است؟

۱۲۸. پریز گردی در دور تا دورش ۶ سوراخ دارد که به فاصله‌های برابر از هم قرار گرفته‌اند. همچنین، فیش ۶شاخهٔ مشابهش را هم داریم. سوراخهای پریز با عددهای از ۱ تا ۶، به‌ترتیبی، شماره‌گذاری شده‌اند؛ همین کار را با شاخه‌های فیش کرده‌ایم. ثابت کنید می‌توان فیش را طوری در پریز کرد که هیچ‌یک از شاخه‌هایش به سوراخی با همان عدد نرود. اگر ۷ سوراخ و ۷ شاخه داشته باشیم، آیا باز هم همین حکم درست است؟

۱۲۹. مقسوم‌علیه‌های طبیعی دو عدد طبیعی m و n به ترتیب عددهای $a_۱$، ...، a_p و $b_۱$، ...، b_qاند و می‌دانیم

$$a_۱+\cdots+a_p=b_۱+\cdots+b_q$$
$$\frac{۱}{a_۱}+\cdots+\frac{۱}{a_p}=\frac{۱}{b_۱}+\cdots+\frac{۱}{b_q}$$

ثابت کنید $m=n$.

۱۳۰. در کشوری سکه‌های زیر رایج‌اند: ۱ سنتی، ۲ سنتی، ۵ سنتی، ۱۰ سنتی، ۲۰ سنتی، ۵۰ سنتی و ۱ دلاری. می‌دانیم A سنت را می‌توانیم با پرداخت B سکه بپردازیم. ثابت کنید می‌توانیم B دلار را با پرداخت A سکه بپردازیم.

۱۳۱. آیا می‌توان صد عدد طبیعی متمایز را روی دایره‌ای طوری چید که حاصل‌ضرب هر دو عدد کنار هم مربع کامل باشد؟

۱۳۲. n فیزیکدان و n شیمیدان دور میز گردی نشسته‌اند. می‌دانیم که برخی از آنها همواره دروغ می‌گویند و بقیه همواره راست. همچنین، می‌دانیم که تعداد فیزیکدانان دروغگو با تعداد شیمیدانان دروغگو برابر است. هر یک از این افراد می‌گوید: «کنار من در سمت راست یک شیمیدان نشسته است.» ثابت کنید n عددی زوج است.

۱۳۳. دربارهٔ عددهای طبیعی a و b می‌دانیم $a^۲ + ab + ۱$ بر $b^۲ + ba + ۱$ بخش‌پذیر است. ثابت کنید $a = b$.

۱۳۴. هر یک از دو ریاضیدان نابغه از عدد محرمانهٔ خودش مطلع است و این دو می‌دانند که عددهایشان یکی اختلاف دارند. این دو یکی در میان از هم سؤال می‌کنند: «آیا تا الان عدد من را شناخته‌ای؟» ثابت کنید سرانجام یکی از آنها به این سؤال پاسخ مثبت می‌دهد.

۱۳۵. صد عدد صحیح روی یک دایره نوشته شده‌اند و می‌دانیم که مجموعشان برابر با ۱ است. هر مجموعه از چند عدد پشت سر هم را «زنجیره» می‌نامیم. تعداد زنجیره‌هایی را پیدا کنید که مجموع عضوهای هر یک از آنها مثبت باشد.

۱۳۶. در یک دوره مسابقات شطرنج هر بازیکن دقیقاً نصف امتیازات ممکن در بازی مقابل سه بازیکن آخر را به‌دست آورده است. چند بازیکن در این مسابقات شرکت کرده‌اند؟

۱۳۷. دربارهٔ عددهای a، b و c می‌دانیم

$$a+b+c=۷, \qquad \frac{۱}{a+b}+\frac{۱}{b+c}+\frac{۱}{c+a}=\frac{۷}{۱۰}$$

مقدار عبارت

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$$

را پیدا کنید.

*۱۳۸. یکصد و نوزده نفر در ساختمانی که ۱۲۰ آپارتمان دارد زندگی می‌کنند. آپارتمانی را که بیش از ۱۵ نفر در آن زندگی می‌کنند «پرازدحام» می‌نامیم. هر روز ساکنان آپارتمانی پرازدحام مشاجره می‌کنند و همگی به آپارتمانهای مختلفی در همین ساختمان می‌روند. آیا درست است که دیر یا زود هیچ‌یک از آپارتمانها پرازدحام نخواهد بود؟

*۱۳۹. چند اتومبیل روی پیستی دایره‌ای‌شکل قرار گرفته‌اند و در مخزن سوخت هر یک از آنها آنقدر سوخت وجود دارد که با همهٔ این سوختها اتومبیلی می‌تواند دور پیست را بزند. ثابت کنید دست‌کم یکی از این اتومبیلها می‌تواند با گرفتن سوخت از دیگر اتومبیلها دور پیست را طی کند.

*۱۴۰. دنبالهٔ عددی ۱، ۹، ۸، ۲، . . . این ویژگی را دارد که هر یک از جمله‌هایش، از جملهٔ پنجم، برابر است با آخرین رقم مجموع چهارجملهٔ قبل از آن. آیا ممکن است در این دنباله به چهار جملهٔ پشت سرهم ۳، ۰، ۴، ۴ برخورد کنیم.

*۱۴۱. ۲۵ خرده‌سنگ یک جا کپه شده‌اند. این کپه را به دو بخش تقسیم می‌کنیم. بعد یکی از این بخشها را هم به دو بخش تقسیم می‌کنیم، و این کار را ادامه می‌دهیم تا به ۲۵ خرده‌سنگ جدا از بقیه برسیم. پس از اینکه یکی از کپه‌ها را به دو بخش تقسیم کردیم حاصل‌ضرب تعداد خرده‌سنگهای این دو بخش را روی تخته‌سیاه می‌نویسیم. ثابت کنید در انتها مجموع همهٔ عددهای نوشته شده روی تخته‌سیاه برابر با ۳۰۰ است.

*۱۴۲. در روستایی همهٔ دخترهایی که با پسری آشنا هستند با یکدیگر نیز آشنا هستند. همچنین، در میان آشنایان هر دختر، تعداد پسران بیشتر از تعداد دختران است. ثابت کنید در این روستا تعداد پسران از تعداد دختران بیشتر یا با آن برابر است.

*۱۴۳. حلزونی در امتداد خطی راست به مدت ۶ دقیقه می‌خزد و چند نفر به آن نگاه می‌کنند. هر یک از این افراد ۱ دقیقه به حلزون نگاه می‌کند و حلزون در این یک دقیقه دقیقاً یک فوت به جلو می‌رود. همچنین می‌دانیم که همیشه دست‌کم یک نفر به حلزون نگاه می‌کند. این حلزون در مدت این ۶ دقیقه حداکثر چقدر ممکن است به جلو برود؟

مسابقه‌های ریاضی

۱. مقدمه

ابوالهول ... قوزکرده برفراز صخره، نظر هر مسافری را که از آن راه می‌گذرد جلب می‌کند و به آنها معمایی می‌دهد، به این شرط که هر کس آن را حل کرد، به سلامت می‌گذرد اما هر کس موفق نشد کشته می‌شود. هنوز کسی موفق به حل آن نشده و همگی هلاک شده‌اند.

ادیپ از این بابت هراسی به دل راه نداد و متهورانه پا پیش گذاشت. ابوالهول از او پرسید: «کدام حیوان است که صبحگاه روی چهار پا راه می‌رود، هنگام ظهر روی دو پا و هنگام غروب روی سه پا؟»

نقل از کتاب «اسطوره‌شناسی»، توماس بالفینچ

به احتمال زیاد این معمای ابوالهول نخستین مسألهٔ المپیادی به معنای واقعی کلمه است. همان‌طور که می‌دانید، ادیپ در آن مسابقهٔ باستانی کاملاً موفق شد.

مسابقه‌های ریاضی امروزی قربانی ندارند و دانش‌آموزان می‌توانند در نهایت آسودگی خیال در مسابقه‌های مختلفی شرکت کنند. در این گونهٔ یکتا از مسابقهٔ ریاضیات، سرگرمی و آزمون سنجش میزان تداوم فعالیتهای ذهنی در هم آمیخته می‌شود. برخی شرکت‌کنندگان آنقدر درگیر می‌شوند که المپیادی «حرفه‌ای» می‌شوند (و این امر در یادگیری ریاضی آنها تأثیر بسزایی دارد). به هر حال، امیدواریم خوانندگان مسابقه‌هایی را که در این فصل از آنها صحبت کرده‌ایم جالب، مفید و سازنده بدانند.

* * *

توصیه به معلمان. ۱. به یاد داشته باشید که دانش‌آموزان، به‌ویژه آنهایی که سن و سال کمتری دارند، دوست دارند هر موضوع جدی‌ای را تبدیل به بازی، سرگرمی یا تفریح کنند. چنین چیزی در ابتدای کار

قابل قبول است و می‌توان از آن به‌عنوان راهی برای آشنا کردن دانش‌آموزان با حوزه‌های جدید ریاضیات استفاده کرد. البته، بهتر است که در فعالیتهای اصلی جلسه‌ها حال و هوایی جدی حاکم باشد.

۲. در هر فصلی از این کتاب و کتابهایی دیگر می‌توانید مسأله‌هایی برای مسابقه‌های ریاضی پیدا کنید.

۲. پیکار ریاضی

این مسابقه یکی از رایجترین مسابقه‌های ریاضی در لنینگراد (و روسیه) است. این مسابقه را یوزف وربیچیک، که بعدها معلم ریاضی یکی از مدارس لنینگراد شد، در اواسط دهۀ ۱۹۶۰ راه‌اندازی کرد. این مسابقۀ تیمی به طرز شگفت‌آوری ریاضیات، سرگرمی، روحیۀ کار گروهی و جذابیت را با هم دارد.

در اینجا قوانین این مسابقه را به اختصار شرح می‌دهیم. هر یک از دو تیم فهرستی از مسأله‌هایی را که هیأت داوران تهیه کرده است دریافت می‌کند (مسأله‌های هر دو تیم یکی است). آنها مدت زمانی مشخص (که ممکن است از ۳۰ دقیقه تا یک هفته تغییر کند) برای حل این مسأله‌ها فرصت دارند. پس از اینکه این مدت تمام شد اعضای تیمها و هیأت داوران در تالاری (که در آن تخته‌سیاهی بزرگ و مقدار زیادی گچ تعبیه شده) گرد هم می‌آیند و پیکار شروع می‌شود.

ابتدا، هیأت داوران با برگزاری «مسابقۀ سرگروهها» مشخص می‌کند که کدام تیم اول شروع می‌کند. به سرگروهها سؤالی ساده داده می‌شود که باید در پای تخته‌سیاه فوری و بدون کمک دیگر اعضای تیم به آن پاسخ دهند. مثلاً، آیا ۷۹۹۹ اول است؟ یا، هفت حلقۀ لاستیکی در فضا قرار دارند؛ آیا ممکن است هر یک از این حلقه‌ها از دقیقاً سه حلقۀ دیگر رد شده باشد؟

به محض اینکه یکی از سرگروهها پاسخ را بگوید مسابقۀ سرگروهها تمام می‌شود. اگر جواب درست باشد، تیمی که سرگروهش جواب درست داده برنده است. در غیر این صورت تیم دیگر می‌برد.

تیم برندۀ تصمیم می‌گیرد که کدام تیم ـ مثلاً A ـ «مبارزطلبی» را شروع کند و پس از آن «مبارزطلبی» شروع می‌شود، یعنی تیم A اعلام می‌کند که راه‌حل یکی از مسأله‌های فهرست را از تیم B می‌خواهد. تیم B می‌تواند مبارزطلبی را با فرستادن یکی از اعضایش به پای تخته‌سیاه به‌عنوان «راوی» (برای توضیح دادن راه‌حل) قبول کند. همچنین، تیم B می‌تواند مبارزطلبی را قبول نکند.

در حالت اول، تیم A یکی از اعضایش را به‌عنوان حریف راوی می‌فرستد. وظیفۀ او تحقیق درستی راه‌حل، برطرف کردن اشکالات آن یا حتی اثبات نادرستی آن است.

در حالت دوم، تیم A باید ثابت کند که مبارزطلبی آنها صادقانه بوده، یعنی آنها باید کسی را به‌عنوان «راوی» مأمور کنند تا راه‌حل درست را بگوید. مانند قبل، تیم B حریفی را می‌فرستد که سعی می‌کند ثابت کند راه‌حل غلط است یا دست‌کم اشتباهی جزئی یا مطلبی ثابت نشده در آن پیدا کند.

در همۀ این حالتها، بجز در یک مورد، مبارزطلبی بعدی را تیم دیگر انجام می‌دهد. مورد استثنا وقتی پیش می‌آید که پس از تحقیق در صادقانه بودن مبارزطلبی (بند قبل را ببینید)، هیأت داوران

تشخیص بدهد تیم A راه‌حلش غلط است (هیأت داوران حق دارد که درستی راه‌حل را بررسی کند، هر وقت خواست سؤالهایی را بپرسد و چیزهایی از این قبیل). در این حالت، تیم A جریمه می‌شود و آنها باید دوباره مبارزطلبی کنند (البته برای مسأله‌ای دیگر).

پس از اینکه بررسی راه‌حلی تمام شد، هیأت داوران امتیازها را تقسیم می‌کند (هر مسأله ۱۲ امتیاز دارد). حتی اگر راه‌حل راوی درست باشد ممکن است امتیازهایی نصیب حریف شود؛ مثلاً، وقتی که چند اشتباه جزئی در راه‌حل باشد که حریف به آنها اشاره کند و راوی آنها را برطرف کند. هیأت داوران همچنین می‌تواند به خودش امتیاز بدهد.

اگر راوی نتواند اشتباه عمده‌ای را که حریف (یا هیأت داوران) پیدا می‌کند ظرف مدت معقولی (که معمولاً ۱ دقیقه است) برطرف کند، مباحثه تمام می‌شود و هیأت داوران می‌تواند نظر طرف دیگر را جویا شود. پس از اینکه این مباحثه هم تمام شد، هیأت داوران امتیازها را تقسیم می‌کند. اگر یکی از تیمها مسأله‌های حل شده‌اش تمام شد و علاقه‌ای به آزمودن بختش در مبارزطلبی از تیم دیگر برای مسأله‌ای حل نشده نداشت می‌تواند از حقش در مبارزطلبی بگذرد. در این حالت، می‌تواند بقیهٔ راه‌حلهایی را که در آن لحظه دارند مطرح کند. این مباحثات هم مانند قبل برگزار می‌شوند.

چند قانون جزئی دیگر هم در طول ۳۰ سال برگزاری پیکارهای ریاضی به آیین‌نامهٔ اولیه اضافه شده‌اند، از جمله

۱. جریمهٔ «غیرصادقانه بودن مبارزطلبی» ۶ امتیاز منفی است.

۲. هیچ‌یک از مسابقه‌دهندگان نمی‌تواند بیش از x بار در پای تخته‌سیاه حاضر شود (مسابقهٔ سرگروهها لحاظ نمی‌شود)، که در اینجا x عددی طبیعی است که مقدار آن هنگام ارائهٔ فهرست مسأله‌ها اعلام می‌شود. معمولاً $x = 2$ یا $x = 3$.

۳. فقط سرگروه یا (در حالتی که سرگروه راوی، حریف یا غایب است) معاونش می‌توانند با هیأت داوران صحبت کنند.

* * *

آخرین و معتبرترین قانون پیکارهای ریاضی این است که در موارد بلاتکلیف حکم حکم هیأت داوران است.

* * *

برگزاری پیکار، توانایی و تجربه می‌خواهد: مثلاً، رایجترین راه شروع (مانند حرکت $e2-e4$ در شطرنج) این است که از رقیبتان راه‌حل دشوارترین مسأله‌ای را که تیمتان حل کرده است بخواهید. همچنین، توصیه می‌کنیم که چند پیکار ریاضی تمرینی ساده در محفل ریاضی خود یا در مدرسه‌تان برگزار کنید.

در اینجا باید خاطرنشان کنیم که علاقه‌مندی به پیکارهای ریاضی در لنینگراد گاهی آنقدر زیاد

است که مدارس، ویژه مسابقه‌های قهرمانی (فقط برای دانش‌آموزان سالهای آخر) برگزار می‌کنند. همچنین پیکار ریاضی «سه جانبه»ای (میان سه تیم) وجود دارد که برگزار کردن آن دشوارتر است.

در اینجا نمونه‌ای از یکی از پیکارهای ریاضی را می‌آوریم. در زیر فهرست مسأله‌های پیکاری را که در سال ۱۹۸۶ میان دو محفل ریاضی برجستهٔ لنینگراد برای سال ششم (دانش‌آموزان ۱۲ — ۱۳ ساله) وابسته به کاخ پیشاهنگان لنینگراد و مدرسهٔ ریاضی جوانان برگزار شده می‌آوریم.

* * *

۱. «کروکودیل» مهره‌ای است که می‌تواند روی صفحهٔ شطرنجی نامتناهی به طریق زیر حرکت کند: در هر خانه‌ای که قرار گرفته باشد، ابتدا به یکی از خانه‌های همسایه (افقی یا عمودی) می‌رود و بعد n خانه در جهت عمود بر امتداد حرکت اول می‌رود. مثلاً، اگر $n = ۲$، «کروکودیل» همان اسب شطرنج است. همهٔ nهایی را پیدا کنید که «کروکودیل» بتواند از هر خانه‌ای به هر خانهٔ دیگر برود.

۲. عددهای p و $p^۲ + ۲^p$ اول‌اند. p را پیدا کنید.

۳. آیا ممکن است مکعب عددی طبیعی به ۱۹۸۵ یک ختم شود؟

۴. ثابت کنید همواره می‌توان سه قطر از قطرهای پنج‌ضلعی محدب طوری پیدا کرد که با آنها بتوان مثلث تشکیل داد.

۵. خانه‌های جدولی $(n+۱) \times n$ را با عددهایی صحیح پر کرده‌ایم. ثابت کنید می‌توان چند تا از ستونهای این جدول (البته نه همهٔ آنها) را طوری حذف کرد که پس از آن مجموع عددهای هر سطر عددی زوج باشد.

۶. به چند طریق می‌توان عدد ۱۵ را به شکل مجموع چند عدد طبیعی نوشت؛ نمایشهایی را که ترتیب جمعوندهایشان فرق دارد متمایز می‌گیریم.

۷. نقطهٔ A را «شبه‌مرکز تقارن» مجموعهٔ M (که بیش از یک نقطه از صفحه را در بر دارد) می‌نامیم، هرگاه بتوان نقطه‌ای را از M طوری حذف کرد که A مرکز تقارن مجموعهٔ به‌دست آمده باشد. مجموعه‌ای متناهی چند شبه‌مرکز تقارن ممکن است داشته باشد؟

۸. سی عدد روی دایره‌ای طوری چیده‌ایم که هر یک از آنها برابر است با تفاضل دو عدد بعدی‌اش در جهت ساعتگرد. اگر بدانیم مجموع این عددها برابر با ۱ است، آنها را پیدا کنید.

۳. نبرد ریاضی

این مسابقه، برخلاف پیکار ریاضی، مسابقه‌ای انفرادی است. بنابراین، در محافلی از آن استفاده کنید که توانایی ریاضی اعضا در یک حد باشد.

چند مسأله برای حل کردن داده می‌شود و برای حل هر یک از آنها امتیازی در نظر گرفته می‌شود. همین که کسی خواست راه‌حلش را بگوید، به پای تخته‌سیاه می‌آید و راه‌حلش را توضیح می‌دهد. اگر راه‌حل درست بود، راوی امتیاز را می‌گیرد. در غیر این صورت، امتیاز مسأله کمی افزایش می‌یابد ـ مقدار این افزایش را معلم مشخص می‌کند ـ و همین مقدار را از امتیازهای راوی کم می‌کنند.

این مسابقه بی‌اشکال هم نیست، زیرا ممکن است برخی مسأله‌ها بیش از حد دشوار باشند و کار به درازا بکشد. معلم باید چاره‌ای برای این کار بیندیشد.

این مسابقه به دانش‌آموزان هنر خویشتن‌داری را می‌آموزد، زیرا باید راه‌حلشان را دقیق وارسی کنند. اگر چنین نکنند، ممکن است نبرد را با نمرهٔ منفی ترک کنند.

این بخش را با آوردن نمونه‌ای از یکی از نبردهای ریاضی به پایان می‌بریم.

۹. «امپراتور» مهره‌ای است که می‌تواند در امتداد قطرها هر تعداد خانه‌ای که بخواهد جلو و عقب برود و قطعه‌ای را با گذشتن از روی آن اسیر کند (البته نمی‌تواند از روی دو تا یا تعداد بیشتری خانهٔ قطری مجاور بگذرد). بیشترین تعداد «امپراتورهایی» که می‌توان روی صفحهٔ شطرنجی ۸ × ۸ قرار داد که هر یک از آنها در معرض تهدید مهره‌ای دیگر باشد چقدر است؟ (۵ امتیاز)

۱۰. از وسط ضلعهای مثلثی حاده بر ضلعهای آن عمودهایی رسم کرده‌ایم. ثابت کنید مساحت شش‌ضلعی‌ای که به این ترتیب به‌دست می‌آید نصف مساحت مثلث است. (۶ امتیاز)

۱۱. دو عدد سه‌رقمی مانند x و y طوری پیدا کنید که مجموع بقیهٔ عددهای سه‌رقمی برابر با $600x$ باشد. (۶ امتیاز)

۱۲. با گونیا می‌توان خطی رسم کرد که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد و بر خطی مفروض در نقطه‌ای مفروض از آن عمودی رسم کرد. با گونیا از نقطه‌ای مفروض خطی عمود بر خطی مفروض رسم کنید. (۱۰ امتیاز)

۱۳. ۱۰ دانش‌آموز کلاس اول و ۱۰ دانش‌آموز کلاس دوم به اردو رفته‌اند. می‌دانیم به‌ازای هر k که $1 \leqslant k \leqslant n$ و به ازای هر k نفر دانش‌آموز کلاس اولی، تعداد دانش‌آموزان کلاس دومی که با دست‌کم یکی از این دانش‌آموزان دوست است از k کمتر نیست. ثابت کنید می‌توان این دانش‌آموزان را به ۱۰ گروه دو نفره طوری تقسیم کرد که هر گروه از یک دانش‌آموز کلاس اول و یک دانش‌آموز کلاس دومی تشکیل شده باشد که با هم دوست‌اند. (۲۰ امتیاز)

۴. ماراتن ریاضی

این مسابقه المپیادی شفاهی است (که می‌توان آن را به شکل نوشتنی هم برگزار کرد). معلم باید برای برگزاری آن از چند نفر دیگر هم کمک بگیرد و فهرست نسبتاً بلندبالایی از مسأله‌های به قدر کافی ساده تهیه کند. پیش از اینکه جزئیات را توضیح دهیم باید کمی از نحوهٔ برگزاری المپیادهای شفاهی بگوییم، که در سنت پترزبورگ بسیار رایج‌اند اما در خارج از بلوک شرق ناشناخته‌اند.

همهٔ راه‌حلها را باید شفاهی به یکی از اعضای هیأت داوران توضیح داد، و البته نباید قبلاً آنها را نوشت. نتیجهٔ ارائهٔ راه‌حل یادداشت می‌شود (+ برای راه‌حل قانع‌کننده و − برای غیر از آن). به هر شرکت‌کننده سه بار برای هر مسأله فرصت داده می‌شود. بنابراین فهرست امتیازات ممکن است شامل «دو منفی» باشد (=) یا «یک مثبت و دو منفی» ($\stackrel{+}{=}$). فهرست دوم را معمولاً معادل + می‌دانند.

المپیادهای شفاهی را معمولاً به دو مرحله تقسیم می‌کنند: مرحلهٔ «مقدماتی» و مرحلهٔ «نهایی» (همان چیزی که در المپیاد سنت‌پترزبورگ، که شفاهی است، اتفاق می‌افتد). در مرحلهٔ اول به همهٔ شرکت‌کنندگان ۴ مسأله داده می‌شود که حل کنند و فقط کسانی که دست‌کم سه‌تا (یا در بعضی مواقع دوتا) از آنها را درست حل کنند به تالار دیگری منتقل می‌شوند که در آنجا به آنها شش یا هفت مسأله (که از قبل با چهارتای اول آنها آشنا هستند) داده می‌شود.

ماراتن ریاضی عالیترین نوع نظامهای حذفی است. معلم باید ۱۰ تا ۲۰ مسأله راکه از قبل بادقت طرح و آماده کرده است داشته باشد. ۵ تا ۱۰تای اول آنها باید بسیار ساده وکاملاً معمولی باشند. میزان دشواری مسأله‌ها باید کم‌کم با بزرگ شدن شمارهٔ مسأله‌ها بیشتر شود.

در ابتدای ماراتن همهٔ دانش‌آموزان مسأله‌های ۱ و ۲ را می‌گیرند. پس از آن شروع به حل آنها یا توضیح دادن راه‌حلشان به معلم یا همکارانش می‌کنند. اگر مسأله‌ای درست حل شود، اعضای هیأت داوران یک علامت مثبت برای شرکت‌کننده می‌گذارند و به او مسألهٔ بعدی در فهرست مسأله‌ها را می‌دهند. مثلاً، اگر کسی مسأله‌های ۳ و ۷ را بگیرد، پس از حل هر یک از آنها مسألهٔ ۸ را می‌گیرد.

بنابراین، در هر لحظه از المپیاد، هر شرکت‌کننده دو مسألهٔ حل نشده پیش رو دارد.

به تجربه معلوم شده که دانش‌آموزان در مدتی که ماراتن برگزار می‌شود از مدت زمان مشابه در جاهای دیگر بیشتر مسأله حل می‌کنند، شاید به این دلیل که تمرکز بیشتری دارند. همچنین، به تجربه معلوم شده است که دانش‌آموزان ماراتن را جالبتر و جذابتر از بقیهٔ المپیادهای شناخته‌شده‌تر می‌دانند.

توصیه به معلمان. با استفاده از مسأله‌های این کتاب می‌توان چندین ماراتن بسیار ساده یا دشوار برگزار کرد. توصیه می‌کنیم چند تا از ساده‌ترین تمرینهای فصلهای موردعلاقه‌تان را انتخاب کنید و آنها را به‌ترتیبی دلخواه مرتب کنید تا مسأله‌های نیمهٔ اول ماراتن باشند. نیمهٔ دوم را هم می‌توان به همین روش با استفاده از مسأله‌هایی که کمی دشوارترند تهیه کرد. میزان دشواری باید به‌تدریج که دانش‌آموزان از روی فهرست به جلو می‌روند افزایش پیدا کند.

توجه. خطرناکترین اشتباهی که ممکن است در آماده کردن مسأله‌های ماراتن پیش بیاید این است که میزان دشواری مسأله‌های اول فهرست اشتباه برآورد شود. اگر یکی از پنج‌ـشش مسألهٔ اول را اغلب دانش‌آموزان حل نکرده باشند، ماراتن ناکام بوده است.

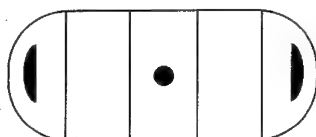
۵. هاکی ریاضی

این مسابقهٔ ریاضی جالب ویژهٔ دانش‌آموزان ۱۰ تا ۱۲ ساله یا بیشتر است. بازی میان دو تیم است که هر یک از ۵ بازیکن تشکیل شده است: یک «دروازه‌بان»، دو «مدافع» و دو «مهاجم».

معلم باید فهرست نسبتاً بلندبالایی از مسأله‌های فوق‌العاده ساده، ترجیحاً محاسباتی، داشته باشد که هر یک از آنها را بتوان در پنج دقیقه حل کرد.

در ابتدای بازی دیسک (که البته فرضی است؛ هر چند که می‌توانید زمین هاکی و دیسک را روی تخته‌سیاه بکشید) در وسط زمین است. دیسک زده می‌شود ـ یعنی به هر یک از بازیکنان داخل زمین هر دو تیم مسألهٔ اول فهرست داده می‌شود. اگر تیم A زودتر راه‌حل را پیدا کرد، دیسک به زمین تیم شکست‌خوردهٔ B می‌رود، که در آنجا مهاجمان تیم A در مقابل مدافعان تیم B بازی می‌کنند. مبارزهٔ آنها بر سر مسألهٔ بعدی در فهرست مسأله‌هاست. برحسب اینکه نتیجهٔ این مبارزه چه باشد، دیسک به وسط زمین برگردانده می‌شود یا به محوطه دروازهٔ تیم B می‌رود. در حالت اخیر، دروازه‌بان تیم B به‌تنهایی با مهاجمان تیم A بر سر مسألهٔ بعدی در فهرست مبارزه می‌کند. اگر مهاجمان ببرند یک امتیاز می‌گیرند و مسألهٔ بعدی در وسط زمین «کاشته» می‌شود.

می‌توانید فرض کنید که زمین بازی از پنج منطقه مانند آنچه در شکل ۱۲۶ نشان داده شده تشکیل شده است. در هر لحظه از بازی، دیسک در یکی از این منطقه‌هاست. برحسب اینکه نتیجهٔ هر مبارزه چه باشد، دیسک به منطقهٔ مجاور در سمت چپ یا سمت راست می‌رود.



شکل ۱۲۶

توصیه‌ها. ۱. برای اینکه جنب و جوش بازی را بیشتر کنید بخش مرکزی زمین را حذف کنید. در این حالت ضربهٔ اول را می‌توان با پرتاب سکه تعیین کرد.

۲. اگر تعداد دانش‌آموزان در محفلتان زیاد است، می‌توانید سه یا تعداد بیشتری تیم تشکیل دهید. این تیمها می‌توانند به گونه‌ای بازی کنند که هر تیم با بقیهٔ تیمها دقیقاً یک بار بازی کند یا مسابقات حذفی برگزار کنند. هر تیمی که در بازی حضور ندارد نقش تماشاگر را دارد.

۳. باید تیمها را بسیار با احتیاط انتخاب کنید. سعی کنید کاری کنید که قدرت متوسط تیمها نزدیک به هم باشد (این موضوع را باید در دیگر مسابقه‌های ریاضی هم رعایت کرد).

۶. مزایدهٔ ریاضی

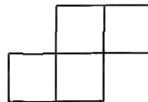
این مسابقه بسیار شبیه قماربازی است، هرچند که اصلاً چنین نیست. به تجربه بر ما معلوم شده که

دانش‌آموزان با اشتیاق فراوان در چنین مسابقه‌هایی شرکت می‌کنند. چیزی که مهم است این است که مزایدهٔ ریاضی را هم به صورت انفرادی می‌توان برگزار کرد هم به صورت تیمی.

قوانین این مسابقه به صورت زیر است. معلم به دانش‌آموزان مسأله‌ای از نوعی خاص می‌دهد (که آن را «مسألهٔ تحقیقاتی» می‌نامیم)، که ممکن است خود معلم هم راه‌حل کامل آن را نداند (هر چند که توصیه می‌کنیم چنین نباشد). به بیان دقیقتر، مسألهٔ تحقیقاتی باید به گونه‌ای باشد که با پاسخهای حین کار کم‌کم به نتیجهٔ نهایی رهنمون شد. برای اینکه مسابقه جالبتر شود دست‌کم باید ۵ یا ۶ تا از این مسأله‌ها داشت.

۱۴. حداکثر چند فیل می‌توان روی صفحهٔ شطرنجی 8×8 گذاشت، به‌طوری که هیچ دو تایی از آنها یکدیگر را تهدید نکنند (یا همین مسأله در مورد اسب، رخ؛ صفحهٔ 10×10 و چیزهایی از این قبیل)؟

۱۵. حداکثر چند تا از شکلهای نشان داده شده در شکل ۱۲۷ را می‌توان بدون همپوشانی درون جدولی 10×10 قرار داد؟



شکل ۱۲۷

۱۶. هر چقدر که می‌توانید برای معمای حرفی-عددی

$$\mathrm{BACK} + \mathrm{BOA} = \mathrm{SCAM}$$

جواب پیدا کنید.

۱۷. با استفاده از رقمهای ۱، ۹، ۸ و ۴، به همین ترتیب، و چهار عمل اصلی تا جایی که می‌توانید عددهای طبیعی متوالی که با ۱ شروع می‌شوند بنویسید. مثلاً،

$$۵ = \frac{۱ + ۹}{\frac{۸}{۴}}$$

۱۸. عدد ۱۹۹۱ را فقط با استفاده از رقمهای ۴ بنویسید. سعی کنید تا جایی که می‌توانید از تعداد کمتری رقم استفاده کنید. هر چقدر که بخواهید می‌توانید از عملهای حساب استفاده کنید.

۱۹. ۷ خط (یا ۸، ۹ یا ۱۰ خط) در صفحه طوری رسم کنید که در میان ناحیه‌هایی که صفحه را به آنها تقسیم می‌کنند، تعداد مثلثها بیشترین مقدار ممکن باشد.

۲۰. بیشترین تعداد «مهاراجه‌ها» را روی صفحه‌ای 10×10 بچینید، به‌طوری که هر خانهٔ صفحه را دست‌کم یکی از مهاراجه‌ها تهدید کند (مهاراجه «ابر مهره‌ای» است که هم شبیه وزیر می‌تواند حرکت کند هم شبیه اسب).

* * *

یادداشت مهم. می‌توان صورت مسأله‌های بالا را، مثلاً با تغییر دادن عددها، شکلها و چیزهایی از این قبیل، عوض کرد و مسأله‌های دیگری به دست آورد.

* * *

پس از اینکه مسأله‌ای به دانش‌آموزان داده شد، مدت زمانی برای حل آن وقت دارند (اگر در یک زمان چند مسأله داده شود مزایده بهتر برگزار می‌شود). سپس به همهٔ تیمها مقداری یکسان از واحد پولی خیالی، مثلاً دینار، داده می‌شود. مثلاً، ممکن است سرمایهٔ اولیهٔ تیمها ۱۰۰۰ دینار باشد.

سرانجام، مزایده شروع می‌شود. مسئول حراج (که معمولاً معلم است) مسأله‌ها را به حراج می‌گذارد. مسئول حراج شروع آن را اعلام می‌کند و قیمت پایهٔ مسألهٔ اول را می‌گوید.

فرض کنید مسألهٔ ۱۷ (در بالا) به حراج گذاشته می‌شود و قیمتش ۱۸۰ دینار است. در این صورت تیمی که این مسأله را حل می‌کند برای راه‌حل آن ۱۸۰ دینار می‌گیرد. اما، همان‌طور که خواهیم دید، ممکن است رد و بدل کردن پول مستقیم نباشد.

* * *

مثال. تیم A، ۱۳۲ دینار برای حق ارائهٔ نتایجش در مورد مسأله می‌پردازد. آنها توضیح می‌دهند که چگونه می‌توان همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا ۶۲ را به‌طریق موردنظر نوشت. البته، در حین کار معلوم می‌شود که طریقهٔ نمایش عدد ۵۱ غلط است. بنابراین، فقط برای نمایش عددهای از ۱ تا ۵۰ اعتبار می‌گیرند.

* * *

بعد باز بار دیگر مسأله به حراج گذاشته می‌شود، منتها این‌بار تیمی که آن را می‌خرد فقط مجاز است که نتایجی قوی‌تر از نتایج تیم قبلی ارائه کند.

* * *

(ادامهٔ) مثال. فرض کنید تیم B، ۲۵ دینار برای حق ارائهٔ نتایجی بهتر از نتایج تیم A می‌پردازد. آنها توضیح می‌دهند که چگونه می‌توان عددهای از ۵۱ تا ۶۸ را به طریق موردنظر نوشت (البته احتیاجی نیست که طریق نمایش عددهای از ۱ تا ۵۰ را هم بار دیگر بگویند).

* * *

مسأله را بارها و بارها به حراج می‌گذارند تا هیچ تیمی دیگر حاضر به خرید آن نشود. وقتی که این حالت پیش بیاید، تیمی که بهترین نتیجه را داشته، ارزش مسأله را کسب می‌کند. در حالتهایی که برنده بتواند راه‌حل کامل را بگوید (یعنی ثابت کند که نتیجهٔ آنها را نمی‌توان بهتر کرد)، واجد دریافت جایزهٔ پولی ویژه‌ای (مثلاً، ۵۰ دینار اضافه‌تر) می‌شوند.

* * *

(ادامهٔ) مثال. مثلاً، تیم C، ۶ دینار برای حق ارائهٔ راه‌حلی بهتر از راه‌حل تیم B می‌پردازد. اما معلوم می‌شود که طریقهٔ نمایش آنها برای عدد ۶۹ غلط است. ۶ دینار آنها بر باد می‌رود و حراج مسألهٔ ۱۷ خاتمه می‌یابد.

نتیجهٔ حراج به قرار زیر است:

تیم A، ۱۳۲ دینار از دست می‌دهد.

تیم B، ۱۵۵ دینار می‌گیرد (۱۵۵ = ۲۵ − ۱۸۰).

تیم C، ۶ دینار از دست می‌دهد.

* * *

اکنون مسألهٔ بعدی به حراج گذاشته می‌شود، و کار همین‌طور تا آخر ادامه پیدا می‌کند.

در زیر پنج مسألهٔ تحقیقاتی دیگر را آورده‌ایم که می‌توانید از آنها در حراجها استفاده کنید.

۲۱. نشانه‌هایی را روی تکه‌ای چوب طوری قرار دهید که تعدادشان کمترین مقدار ممکن باشد و بتوان هر طولی را که برحسب اینچ عددی طبیعی از ۱ تا ۱۵ (یا از ۱ تا ۲۰، ۳۰ یا عددهای دیگر) است با استفاده از این نشانه‌ها اندازه گرفت؛ یعنی، این طول را بتوان با فاصلهٔ میان دو تا از این نشانه‌ها نشان داد.

۲۲. دست‌کم چند برش لازم است که بتوان مکعبی ۵ × ۵ × ۵ را به ۱۲۵ مکعب واحد تقسیم کرد، به‌شرطی که بدانیم می‌توان بیش از برشها، قطعه‌ها را به دلخواه روی هم چید.

۲۳. ۱۰ آجر داریم که طول هر کدام ۱۰ اینچ است. باید آنها را روی هم طوری بچینیم که نریزند، اما لازم نیست که دقیقاً روی هم قرار بگیرند. فاصلهٔ افقی طرفهای راست آجرهای بالایی و پایینی حداکثر چقدر ممکن است باشد؟

۲۴. مربعی را به مثلثهایی حاده تقسیم کنید، به‌طوری که تعداد مثلثها کمترین مقدار ممکن باشد.

۲۵. تا جایی که می‌توانید جوابهایی برای معادلهٔ $x^۲ + y^۲ = z^۲$ در مجموعهٔ عددهای طبیعی کمتر از ۵۰ (یا کمتر از ۴۰ یا کمتر از ۱۰۰) پیدا کنید.

پاسخ، راهنمایی، راه‌حل

۰. فصل صفر

۱. پاسخ: بعد از ۵۹ ثانیه. اگر از آخر به اول بیاییم، معلوم می‌شود که چون ظرف شیشه‌ای بعد از گذشت ۶۰ ثانیه پر شده است، پس باید یک ثانیه قبل از آن تا نیمه پر شده باشد.

۲. باز هم از آخر به اول می‌رویم. یکی از آنها، مثلاً الکس، می‌تواند یک سکه معادل ۱۵ بلیت برای هر سه‌تایشان بپردازد. در این صورت هر یک از دو نفر دیگر ۵ بلیت به الکس بدهکار می‌شود. اما آنها به آسانی می‌توانند این بدهی را بپردازند؛ مثلاً، می‌توانند به الکس سکه‌ای معادل ۲۰ بلیت بدهند و در ازایش سکه‌ای معادل ۱۵ بلیت از او بگیرند.

۳. ایدهٔ اصلی حل مسأله این است که زوجیت شمارهٔ آخرین صفحهٔ کنده شده، عکس زوجیت شمارهٔ اولین صفحهٔ کنده شده است. فهمیدن این مطلب چندان دشوار نیست؛ فقط کافی است ببینیم که وقتی جک ۱ برگ، بعد ۲ برگ و بعد از آن چند برگ را می‌کند چطور می‌شود. از میان عددهای سه‌رقمی که با رقمهای ۱، ۳ و ۸ نوشته می‌شوند، فقط عدد ۳۱۸ از ۱۸۳ بزرگتر و زوجیتش عکس آن است. اکنون توجه کنید که ۱۳۶ = ۱ + ۱۸۳ − ۳۱۸، که این عدد پاسخ مسأله است.

۴. تحت شرطهای مسأله فقط می‌توانیم هر مقدار میخ را که به ما بدهند به دو کپهٔ هموزن تقسیم کنیم. بنابراین مثلاً می‌توانیم کپهٔ اولیه را پشت سر هم نصف کنیم و کپه‌هایی ۱۲، ۶ و ۳ کیلوگرمی به‌دست آوریم. در این صورت از سه کپهٔ ۳ کیلوگرمی ۹ کیلوگرم میخ به‌دست می‌آید.

۵. پاسخ: این هزارپا اولین بار در پایان روز ۷۱ام (یعنی پیش از اینکه شب ۷۱ام آغاز شود) به بالای تیرک می‌رسد. اکثراً این‌طور استدلال می‌کنند که ماحصل حرکت این هزارپا در هر شبانه‌روز ۱ سانتیمتر است و در نتیجه ۷۵ شبانه‌روز طول می‌کشد تا به بالای تیرک برسد. در هر صورت، در پایان ۷۰امین شبانه‌روز هزارپا ۷۰ سانتیمتر بالا رفته است و با تلاش روز بعدش ۵ سانتیمتری هم که «مانده بود» طی می‌شود.

۶. اولین، هشتمین، پانزدهمین، بیست و دومین و بیست و نهمین روز هر ماه یک روز از هفته‌اند. چون ژانویه ۳۱ روزه است، اگر این ماه با روز معینی آغاز شود پنج تا از آن روز و پنج تا هم از دو روز بعدی هفته در آن وجود خواهد داشت. به این دلیل ژانویهٔ سال موردنظر ممکن نیست با شنبه، یکشنبه یا دوشنبه شروع شده باشد (زیرا در غیر این صورت در آن ماه ژانویه پنج تا دوشنبه وجود می‌داشت) و به همین ترتیب آن ماه با چهارشنبه، پنج‌شنبه یا جمعه هم شروع نشده است (وگرنه در آن ماه پنج تا جمعه وجود می‌داشت). بنابراین اول ژانویه آن سال سه‌شنبه بوده است؛ اکنون فهمیدن اینکه بیستم ژانویه یکشنبه بوده است چندان دشوار نیست.

۷. بی‌آنکه از کلی بودن راه‌حلمان چیزی کاسته شود می‌توانیم فرض کنیم که قطر داده شده قطری است که گوشهٔ بالا سمت چپ را به گوشهٔ پایین سمت راست وصل می‌کند. اکنون همهٔ خانه‌هایی را که این قطر از آنها می‌گذرد سیاه می‌کنیم. در هر سطر جدول خانهٔ سیاهی را که از همهٔ خانه‌های سیاه دیگر به ضلع (قائم) سمت چپی جدول نزدیکتر است با حرف R علامتگذاری می‌کنیم. به همین ترتیب در هر ستون خانهٔ سیاهی را که از همهٔ خانه‌های سیاه دیگر به ضلع (افقی) بالایی جدول نزدیکتر است با حرف C علامتگذاری می‌کنیم. می‌توان ثابت کرد که هر یک از خانه‌های سیاه دست‌کم یک بار علامتگذاری می‌شود و فقط خانهٔ واقع در گوشهٔ بالا سمت چپ بیش از یک بار علامتگذاری می‌شود. بنابراین تعداد خانه‌های سیاه برابر با مجموع تعداد خانه‌های با علامت R و تعداد خانه‌های با علامت C منهای یک است: $۱۱۸۹ = ۱ - ۹۹۱ + ۱۹۹$. بنابراین پاسخ مسأله برابر با ۱۱۸۹ است.

اکنون سعی می‌کنیم که ادعاهای قبلیمان را ثابت کنیم. اولاً، چرا هر یک از خانه‌های سیاه دست‌کم یک بار علامتگذاری می‌شوند؟ اگر یکی از این خانه‌ها، مثلاً A، با هیچ‌یک از حروف علامتگذاری نشود، آن‌وقت خانه‌های همسایهٔ سمت چپی و بالاییش هم باید سیاه باشند؛ یعنی قطر باید از آنها هم بگذرد که این ممکن نیست. ثانیاً، اگر خانهٔ سیاهی با هر دو حرف R و C علامتگذاری شود، آن‌وقت باید هیچ خانهٔ سیاهی سمت چپش در همان سطر و بالایش در همان ستون وجود نداشته باشد. یعنی این قطر باید از گوشهٔ بالا سمت چپ این خانه بگذرد که این هم ممکن نیست، گرچه استدلالش پیچیده‌تر است (علتش این است که عددهای ۱۹۹ و ۹۹۱ نسبت به هم اول‌اند، اما تصور نمی‌کنیم هنگام تشریح مسأله‌های این فصل وارد شدن به جزئیاتی فنی از این دست چندان مناسب باشد).

۸. می‌خواهیم تا آنجا که ممکن است رقمهای ۵ بیشتری در سمت چپ عدد موردنظر بیایند. این کار را می‌توان این‌طور انجام داد که ابتدا نخستین دنبالهٔ ۱۲۳۴ را خط می‌زنیم و ۵ را می‌گذاریم بماند، بعد دنبالهٔ ۱۲۳۴ دیگر را خط می‌زنیم. روشن است که اگر هر رقم دیگری بجز ۵ را در سمت چپ عددمان می‌گذاشتیم بماند عدد حاصل کوچکتر می‌شد. با وجود این، رقم ۵ دیگری را نمی‌توانیم پهلوی دو تا ۵ قبلی بیاوریم چون اکنون فقط می‌توانیم دو رقم دیگر را خط بزنیم.

بنابراین دو رقم کوچک بعدی یعنی ۱ و ۲ را خط می‌زنیم. اکنون فهمیدن اینکه عدد حاصل، یعنی ۵۵۳۴۵۱۲۳۴۵۱۲۳۴۵، بزرگترین عدد ممکن است چندان دشوار نیست.

۹. می‌خواهیم هر قدر مدت زمان بیشتری که ممکن است، میان گفتن این جمله و روز تولد بعدی پیتر، وجود داشته باشد. به این مدت زمان حداکثر، می‌توان این‌طور دست یافت که او این حرف را در اولین روز ژانویه گفته و روز تولدش ۳۱ دسامبر باشد. بنابراین پیتر در پایان سال بعد (میلادی) ۱۳ ساله می‌شود.

۱۰. خیر، حق با او نیست. در حقیقت، اینکه پیشامد A (بارندگی) همیشه باعث پیشامد B (عطسهٔ گربه) می‌شود به این معنی نیست که پیشامد B هم باعث پیشامد A شود. این مثالی از یک جور اشتباه منطقی بسیار رایج، یعنی قاتی کردن یک حکم با عکسش، است.

۱۱. **پاسخ:** ۱۲ دایره کشیده شده است: پنج تا از آنها روی یک طرف آن برگ کاغذند و هفت‌تای دیگر روی طرف دیگرش. تنها توجیه ممکن برای آنچه در کلاس اتفاق افتاده است همین است.

۱۲. **پاسخ:** بله ممکن است؛ در صورتی که آن استاد زن باشد.

۱۳. لاک‌پشت سوم دروغ گفته است.

۱۴. او این‌طور استدلال کرده است: «اگر صورتم تمیز بود، آن وقت یکی از همکارانم که می‌بیند شخص سوم به چیزی می‌خندد، می‌فهمد که صورت خودش هم با دوده سیاه شده است. چون او هنوز می‌خندد، پس صورت من هم باید سیاه باشد.»

۱۵. قطعاً درصد شیر در چای برابر با درصد چای در شیر است، چون مقدار کل شیر (یا چای) در هر دو لیوان تغییر نمی‌کند.

۱۶. شکل ۱۲۸ را ببینید. این پاسخ با لحاظ کردن آن جدولهایی که از دورانها و بازتابهایش به‌دست می‌آید یکتاست.

۴	۳	۸
۹	۵	۱
۲	۷	۶

شکل ۱۲۸

۱۷. بیشترین مقدار ممکن کلمهٔ THERE برابر با ۹۵۳۴۳ است.

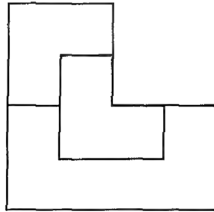
۱۸. این معما فقط یک جواب دارد: ۵۱۲۸۶ + ۱۵۸۲ = ۵۲۸۶۸.

راهنمایی: $L + L < ۱۰$؛ $S + S \geqslant ۱۰$؛ در غیر این صورت، رقمهای صدگان و یکان در عدد $BASES$ با هم برابر نمی‌شوند ($B \neq E$!).

۱۹. اسکناسهای یک دلاری را می‌توان این‌طور توی کیف پولها تقسیم کرد:

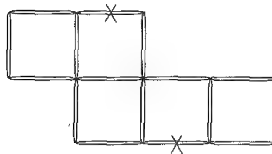
$$۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۱۶ + ۳۲ + ۶۴$$

۲۰. شکل ۱۲۹ را ببینید.



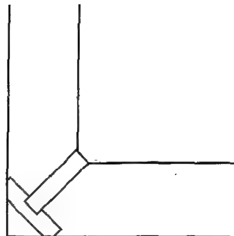
شکل ۱۲۹

۲۱. شکل ۱۳۰ را ببینید.



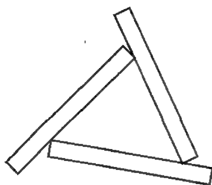
شکل ۱۳۰

۲۲. شکل ۱۳۱ را ببینید.



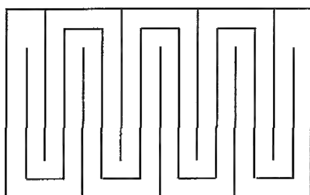
شکل ۱۳۱

۲۳. سه تا از مدادها را بردارید و آنها را آن‌طور که در شکل ۱۳۲ نشان داده شده است بچینید. سه مداد دیگر را هم همین‌طور بچینید منتها «چرخش» آنها در جهت مخالف باشد و بعد آنها را روی سه‌تای اول بگذارید.



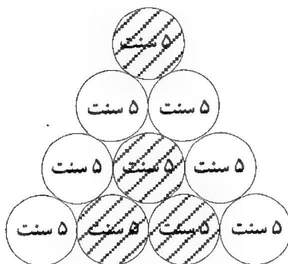
شکل ۱۳۲

۲۴. شکل ۱۳۳ را ببینید.



شکل ۱۳۳

۲۵. چهار سکه‌ای را که در شکل ۱۳۴ نشان داده شده‌اند بردارید.



شکل ۱۳۴

۱. زوجیت

۲. اسب همیشه از خانه‌ای به یک رنگ به خانه‌ای به رنگ دیگر می‌رود. بنابراین رنگ خانه‌هایی که اسب در آنها می‌نشیند یکی در میان از سفید به سیاه و برعکس تغییر می‌کند. برای بازگشتن به خانه‌ای همرنگ خانه‌ای که از آنجا به راه افتاده بود (به‌ویژه، همان خانه) باید تعداد حرکاتش عددی زوج باشد.

۴. **پاسخ:** خیر، ممکن نیست. فرض کنید چنین خطی وجود داشته باشد. اگر مسیر موردنظر را دنبال

کنیم، هر بار که از این خط می‌گذریم از نیمصفحهٔ یک طرف خط به نیمصفحهٔ طرف دیگرش می‌رویم (هر خط صفحه را به دو نیمصفحه تقسیم می‌کند). چون این مسیر بسته است، آخر سر به همان طرف خط می‌رسیم که از آنجا به راه افتاده بودیم. اما در این فرایند طرفهای خط یکی در میان عوض می‌شوند و از این رو، تعداد رأسهای این چندضلعی باید عددی زوج باشد.

۵. **پاسخ**: خیر، نمی‌تواند. موقعیت سه دیسک موردنظر را در صورتی «درست» می‌نامیم که در ترسیم مثلث ABC از A به B به C (و بازگشت به A) حرکت ساعتگرد باشد و در غیر این‌صورت آن را «نادرست» می‌نامیم. به‌سادگی معلوم می‌شود که بعد از هر حرکت «درست» موقعیت دیسکها عوض می‌شود. از این رو، موقعیت اولیه ممکن نیست دوباره به‌دست بیاید.

۶. **پاسخ**: پنج‌تا. اگر هر یک از دوستان کاتیا پهلوی بچه‌ای همجنس خود ایستاده باشد، آن‌وقت روشن است که همهٔ این بچه‌ها همجنس‌اند. یعنی اینکه این پسرها و دخترها باید یکی در میان ایستاده باشند و در نتیجه تعداد دخترها با تعداد پسرها برابر است.

۸. **پاسخ**: خیر. روی صفحهٔ موردنظر ۲۵ خانه وجود دارد. چون هر دومینو دو خانه را می‌پوشاند، با این دومینوها می‌توان فقط تعدادی زوج از خانه‌ها را پوشاند.

۹. اگر این محور تقارن از هیچ رأسی نگذرد، آن‌وقت ۱۰۱ رأس را می‌توان به جفت رأسهای قرینهٔ هم افراز کرد. اما چنین چیزی ممکن نیست، چون ۱۰۱ عددی فرد است. با وجود این، ده‌ضلعی منتظم مثالی از ده‌ضلعی‌ای است که یک محور تقارن دارد و این محور تقارن از هیچ‌یک از رأسهایش نمی‌گذرد.

۱۰. درون زنجیرهٔ دومینوها هر تعداد خال به شکل یک جفت می‌آید (که پشت سرهم گذاشته می‌شوند). چون در یک دست دومینو هشت تا ۵ هست، روی آخرین خانه هم باید پنج تا خال وجود داشته باشد.

۱۱. **پاسخ**: خیر. درستی این پاسخ را با برهان خلف ثابت می‌کنیم. اگر چنین زنجیره‌ای وجود داشته باشد، آن‌وقت یکی از عددهای ۱، ۲ یا ۳ در هیچ‌یک از دو سر زنجیرهٔ موردنظر نمی‌آیند. فرض کنید عدد ۳ چنین عددی باشد. اکنون درون زنجیره ۳ها دوتادوتا می‌آیند و از این رو عدد ۳ به تعداد دفعات زوج می‌آید. با وجود این، چون «صفرها» را کنار گذاشته‌ایم، در این دست دومینو روی هم هفت تا ۳ هست. بنابراین به تناقض می‌رسیم.

۱۲. پاسخ منفی است. فرض کنید بتوانیم ۱۳ضلعی محدبی را به چند متوازی‌الاضلاع تقسیم کنیم. یک ضلع از این ۱۳ضلعی را انتخاب می‌کنیم و متوازی‌الاضلاعی را که شامل آن است در نظر می‌گیریم (روشن است که دو متوازی‌الاضلاع از این دست وجود ندارند). ضلع روبه‌روی این متوازی‌الاضلاع هم ضلع متوازی‌الاضلاع دیگری است. این متوازی‌الاضلاع دوم خودش ضلع دیگری موازی با اولی دارد و می‌توانیم همین‌طور این «زنجیرهٔ» متوازی‌الاضلاعها را ادامه دهیم تا وقتی که به ضلعی از ۱۳ضلعی برسیم. از این‌رو، این ضلع موازی با ضلعی است که استدلال را از آنجا آغاز کرده بودیم و چون ممکن نیست چندضلعی‌ای محدب سه‌ضلع دوبه‌دو موازی داشته باشد، این ضلع با هیچ ضلع دیگر ۱۳ضلعی محدب موردنظر موازی نیست.

با این استدلال ثابت می‌شود که اگر بتوانیم ۱۳ضلعی مفروض را به چند متوازی‌الاضلاع تقسیم کنیم، آن‌وقت می‌توان همهٔ ضلعها را به جفت ضلعهای موازی تقسیم کرد. چون ۱۳ عددی فرد است، این کار ممکن نیست.

۱۴. فرض کنید هیچ مهره‌ای در خانهٔ مرکزی صفحه قرار نگرفته باشد. همهٔ جفتهایی از مهره‌ها را که نسبت به یکی از قطرها قرینهٔ هم‌اند با یک نخ به هم وصل می‌کنیم. در این صورت همهٔ مهره‌ها به چند «گردنبند» تقسیم می‌شوند؛ گردنبند گروهی از مهره‌هاست که با نخ به هم وصل شده‌اند. اما آن‌وقت در هر «گردنبند» یا دوتا مهره وجود دارد یا چهارتا؛ یعنی، تعداد کل مهره‌ها عددی زوج است که این تناقض است.

۱۵. فهمیدن اینکه پانزده ۱ در جدول موردنظر وجود دارد چندان دشوار نیست؛ مثلاً یک راهش این است که توجه کنید که در هر ستون یک ۱ وجود دارد. اکنون اگر از حکم مسألهٔ ۱۳ در مورد خانه‌هایی که شامل ۱اند استفاده کنیم معلوم می‌شود که دست‌کم یک ۱ باید روی قطر اصلی باشد. اگر همین‌طور استدلال کنیم نتیجه می‌شود که قطر اصلی باید شامل یک ۲، یک ۳ و . . . باشد. نمونه‌ای از چنین جدولی در زیر نشان داده شده است.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳
۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵
۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
۱۳	۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۴	۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
۱۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴

۱۷. پاسخ: خیر. مجموع دو عدد روی هر برگ عددی فرد است و مجموع ۲۵ عدد فرد هم عددی فرد می‌شود، اما ۱۹۹۰ عددی زوج است.

۱۸. روشن است که هر یک از این عددهای صحیح یا ۱+ است و یا ۱− و تعداد (۱−)ها عددی زوج است (چون حاصل‌ضربشان مثبت شده است). اگر مجموعشان صفر باشد، آن‌وقت باید ۱۱ عدد ۱− داشته باشیم که تناقض است.

۱۹. پاسخ: خیر. در میان عددهای موردنظر فقط یکی زوج است (عدد ۲) و بقیه‌شان فردند. بنابراین مجموع عددهای سطر شامل ۲ فرد است، در حالی که مجموع عددهای هر سطر دیگر عددی زوج است.

۲۰. پاسخ: خیر. مجموع عددهای از ۱ تا ۱۰ برابر با ۵۵ است و با تغییر علامت هر یک از آنها مقدار این مجموع به اندازهٔ عددی زوج تغییر می‌کند. در نتیجه مقدار این مجموع باز هم عددی فرد می‌ماند.

۲۱. راه‌حل این مسأله عین راه‌حل مسألهٔ ۲۰ است، چون مجموع ۱۹۸۵ + ⋯ + ۳ + ۲ + ۱ عددی فرد است.

۲۲. پاسخ: خیر. به سادگی می‌توان فهمید که عمل موردنظر زوجیت مجموع عددهای روی تخته‌سیاه را تغییر نمی‌دهد. چون زوجیت این مجموع در ابتدا فرد است، هیچ‌وقت ممکن نیست مقدارش برابر با ۰ شود.

۲۳. پاسخ: خیر. هر دومینو یک خانهٔ سیاه و یک خانهٔ سفید را می‌پوشاند، اما اگر خانه‌های $a1$ و $h8$ را حذف کنیم، آن‌وقت تعداد خانه‌های سفید دوتا بیشتر از خانه‌های سیاه می‌شود.

۲۴. فرض کنید عدد صحیحی ۱۷ رقمی وجود داشته باشد که «مجموع آن با مقلوبش» شامل هیچ رقم زوجی نیست. برای راحتی کار، ستونهای رقمها را از راست به چپ شماره‌گذاری می‌کنیم و الگوریتم جمع معمولی را درنظر می‌گیریم. رقم نهم عددمان با خودش جمع می‌شود. به این ترتیب در حاصل‌جمع یک رقم زوج ایجاد می‌شود مگر آنکه «ده بر یکی» از ستون هشتم وجود داشته باشد. اما اگر چنین ده بر یکی وجود داشته باشد، آن‌وقت یک ده بر یک هم از ستون دهم به ستون یازدهم وجود دارد (از ترتیب رقمها که بگذریم، ستون دهم عین ستون هشتم است). بنابراین زوجیت رقمهای ستون هفتم یکی است و در نتیجه ده بر یکی از ستون ششم لازم است.

اگر به همین ترتیب ادامه دهیم در می‌یابیم که باید روی هر ستون شمارهٔ فرد ده بر یکی وجود داشته باشد. اما ممکن نیست که روی ستون اول ده بریک داشته باشیم و در نتیجه به تناقض می‌رسیم.

۲۵. پاسخ: خیر. چون هر سرباز هر دورهٔ مأموریتش را با دو نفر دیگر بوده است، اگر او با هر سرباز دیگر دقیقاً یک بار مأموریت بوده باشد، آن‌وقت ۹۹ سرباز باقی‌مانده را می‌توان به جفتهایی که دوره‌های مأموریتش را با آنها بوده است افرازکرد. پس به تناقض می‌رسیم، چون ۹۹ عددی فرد است.

۲۶. به ازای هر نقطه مانند X که بیرون پاره‌خط AB قرار دارد، $AX - BX = \pm AB$. اکنون اگر فرض کنیم که مجموع فاصله‌های نقاط موردنظر از نقطهٔ A با مجموع فاصله‌هایشان از نقطهٔ B برابر باشد، آن‌وقت مقدار عبارت $\pm AB \pm AB \pm \cdots \pm AB$، که در آن ۴۵ جمعوند وجود دارد، صفر است که چنین چیزی نیست.

۲۷. می‌توانیم از آخر مسأله شروع کنیم و این وضعیت را تحلیل کنیم. اگر نه‌تا ۱ دور دایره وجود داشته باشد، آن‌وقت قبل از اینکه آخرین عمل اجرا شود باید یا نه‌تا ۱ دور دایره باشد یا نه‌تا ۰. چون در ابتدا نه‌تا ۱ وجود ندارد، این نه‌تا ۱ آخری را از این راه نمی‌توان به‌دست آورد. اگر نه‌تا ۰ دور دایره باشد، آن‌وقت اصلاً وضعیت مطلوب در مرحلهٔ قبلی به‌دست می‌آید. اما آیا چنین حالتی ممکن است پیش بیاید؟ اگر نه‌تا ۰ دور دایره باشد، آن‌وقت در مرحلهٔ قبل از آن عددهای ۰ و ۱ باید یکی در میان قرارگرفته باشند. اما چنین چیزی ممکن نیست، چون تعداد کل عددها عددی فرد است.

۲۸. از یکی از افراد شروع و آنها را شماره‌گذاری می‌کنیم. از روش اثبات غیرمستقیم استفاده و فرض می‌کنیم دو بغل‌دستی هیچ کسی دانش‌آموز نباشند. فرض کنید در مکان kام دانش‌آموز باشد. در این صورت یا در مکان $(k-۱)$ام معلمی هست یا در مکان $(k+۱)$ام. اگر در مکان $(k+۱)$ام معلمی نشسته باشد، آن‌وقت در مکان $(k+۲)$ام دانش‌آموز نیست (وگرنه هر دو بغل‌دستی این معلم دانش‌آموزند). اگر در مکان $(k+۱)$ام دانش‌آموز باشد، آن‌وقت در مکان $(k+۲)$ام باید معلمی نشسته باشد (وگرنه هر دو بغل‌دستی این دانش‌آموز دانش‌آموزند). با استدلالی مشابه ثابت می‌شود که در مکان $(k-۲)$ام هم باید معلمی نشسته باشد.

اگر به همین ترتیب استدلال کنیم و شماره‌ها را «به‌پیمانهٔ ۵۰» در نظر بگیریم، می‌توانیم ثابت کنیم که اگر در مکان kام معلم باشد، آن‌وقت در هر دو مکان $(k-۲)$ام و $(k+۲)$ام دانش‌آموز نشسته است. اکنون، اگر فقط آن ۲۵ نفری را که در مکانهای زوج واقع‌اند در نظر بگیریم، درمی‌یابیم که دانش‌آموزان و معلمان در این مکانها یکی در میان دور میز نشسته‌اند. اما ۲۵ عددی فرد است و از این‌رو چنین چیزی غیرممکن است.

دانش‌آموزان را باید ترغیب کرد تا آن بخش از راه‌حل مسأله را که گفتیم «اگر به‌همین ترتیب به استدلال کردن ادامه دهیم» خودشان به انجام رسانند و این‌طور نباشد که بدون دردسر فقط به تقارن وضعیت موجود میان دانش‌آموزان و معلمان تکیه کنند.

۲۹. فرض کنید این حلزون بعد از پیمودن N پاره‌خط قائم به «خانه‌اش» بازگشته باشد. در این صورت به آسانی می‌توان دریافت که این حلزون N پاره‌خط افقی را هم پیموده است. بنابراین، این جانور روی هم $۲N$ پاره‌خط را پیموده و $۳۰N$ دقیقه $(۳۰N = ۱۵(۲N))$ وقت صرف کرده است. چون حلزون به خانه‌اش بازگشته است، N عددی زوج است (مثلاً یک دلیلش این است که تعداد پاره‌خطهای روبه‌بالای پیموده شده باید با تعداد پاره‌خطهای رو به پایین پیموده شده برابر باشد و مجموع این عددها N است). از این رو $۲N$ مضربی از ۴ و (۱۵ دقیقه) $(۲N)$ چند ساعت کامل است.

۳۰. پاسخ: خیر. این ملخها را A، B و C می‌نامیم. وضعیتهای ABC، BCA و CAB (از چپ به راست) را درست به حساب می‌آوریم و وضعیتهای ACB، BAC و CBA را نادرست. به‌آسانی

می‌توان فهمید که بعد از هر پرش، وضعیت درست به وضعیت نادرست تبدیل می‌شود و برعکس، وضعیت نادرست به وضعیت درست.

۳۱. پیتر باید سکهٔ انتخاب شده را کنار بگذارد، سکه‌های باقی‌مانده را به دو کپهٔ ۵۰ سکه‌ای تقسیم کند و با وسیلهٔ اندازه‌گیریی که دارد اختلاف وزن این کپه‌ها را پیدا کند. ثابت می‌کنیم که اگر سکهٔ انتخاب شده اصل باشد، این اختلاف وزن عددی زوج است و اگر سکهٔ موردنظر تقلبی باشد، اختلاف وزن کپه‌ها عددی فرد است.

ابتدا فرض کنید که سکهٔ انتخاب شده اصل باشد. اگر وزن کل سکه‌های اصل باقی‌مانده را می‌دانستیم، می‌توانستیم با افزودن پنجاه عدد ۱+ یا ۱− به آن، وزن کل سکه‌های تقلبی را حساب کنیم. یعنی اینکه اگر ۵۰ سکهٔ اصل باقی‌مانده را در یک کفهٔ ترازو و ۵۰ تا سکهٔ تقلبی را در کفهٔ دیگرش بریزیم، اختلاف وزنشان عددی زوج می‌شود. به آسانی می‌توان فهمید که در این شرایط اگر یک سکه را از یک طرف ترازو با سکه‌ای از طرف دیگرش عوض کنیم، آن‌وقت اختلاف وزن سکه‌های دو کفه به‌اندازهٔ ۲± تغییر می‌کند. می‌توانیم به‌همین ترتیب سکه‌ها را میان کفه‌های ترازو با هم عوض کنیم. در هر معاوضه چنانچه سکه‌ها یکجور باشند اختلاف وزن دو کفه تغییر نمی‌کند. اگر یکی از سکه‌ها اصل و دیگری تقلبی باشد، اختلاف وزن دو کفه به اندازهٔ ۲± تغییر می‌کند. در معاوضهٔ بعدی اگر یک کفه سنگینتر شد و کفهٔ دیگر سبکتر، اختلاف وزن در کل دو معاوضه به‌اندازهٔ ۴± تغییر کرده است. در هر صورت با عمل معاوضهٔ سکه‌ها زوجیت اختلاف وزن دو کفه همان که بود می‌ماند. از طرف دیگر، می‌توان هر آرایش از سکه‌ها را روی دو کفهٔ ترازو با معاوضهٔ سکه‌های آرایشهای اولیه به‌دست آورد. چون اختلاف وزن دو کفه در ابتدا صفر است هر اختلاف وزنی هم که بعداً به‌دست می‌آید باید عددی زوج باشد.

به‌همین ترتیب می‌توانیم ثابت کنیم که اگر سکهٔ موردنظر تقلبی باشد، آن‌وقت اختلاف وزن دو کفه عددی فرد است؛ زیرا اگر همهٔ سکه‌های تقلبی باقی‌مانده را در یک کفهٔ ترازو (و سکه‌های اصل را هم در کفهٔ دیگرش) بریزیم، اختلاف وزن دو کفه عددی فرد می‌شود (مجموع ۴۹ تا تفاضل که همگی یا ۱+اند یا ۱−). باز وقتی دو سکه با هم معاوضه می‌شوند زوجیت این اختلاف وزن تغییر نمی‌کند. از این رو، اگر سکهٔ موردنظر تقلبی باشد، اختلاف وزن دو کفه عددی فرد می‌شود.

۳۲. **پاسخ**: خیر. فرض کنید این عددها همان‌طورکه خواسته شده است چیده شده باشند. بعد مکانهای این عددها را از ۱ تا ۹ (مثلاً از چپ به راست) شماره‌گذاری کنید. اگر عدد ۱ در مکان شمارهٔ N باشد، آن‌وقت به‌سادگی معلوم می‌شود که تفاضل شمارهٔ مکان عدد ۲ و N عددی زوج است و در نتیجه این دو عدد یا هر دو زوج‌اند و یا هر دو فرد. همین مطلب در مورد عددهای ۲ و ۳، ۳ و ۴، ... درست است. یعنی اینکه شماره‌های مکانهای این عددها یا همگی زوج‌اند و یا همگی فرد. چون در اینجا نه عدد داریم و زوجیت شماره‌های حداکثر ۵ مکان عین هم است (آن هم در

صورتی که شماره‌های این مکانها فرد باشند)، پس به تناقض می‌رسیم.

۲. ترکیبیات ـ ۱

۲۸. چون هر یک از پنج پاکت نامه را می‌توان به‌طور مستقل با هر یک از چهار تمبر تکمیل کرد، پس باید تعداد انتخابها را در هم ضرب کنیم: $۵ \times ۴ = ۲۰$.

۲۹. دو حرف صدادار مختلف و سه حرف بی‌صدای متفاوت وجود دارند که می‌توان آنها را به‌طور مستقل انتخاب کرد. بنابراین پاسخ مسأله ۲×۳ یا ۶ است.

۳۰. چون هیچ انتخابی باعث ایجاد محدودیت برای دیگر انتخابها نمی‌شود، تعداد انتخابها را در هم ضرب می‌کنیم.
پاسخ: $۲ \times ۵ \times ۷$ یا ۷۰.

۳۱. چون هر دو تمبر را می‌توان معاوضه کرد، پس ۲۰×۲۰ راه برای معاوضهٔ تمبرها و به همین ترتیب ۱۰×۱۰ راه برای معاوضهٔ کارت پستالها وجود دارد. بنابراین پاسخ مسأله $۲۰ \times ۲۰ + ۱۰ \times ۱۰$ یا ۵۰۰ است.

۳۲. دو حالت در نظر می‌گیریم: یا همهٔ رقمهای عددهای موردنظر فردند و یا همگی زوج. در حالت نخست $۵^۶$ عدد به‌دست می‌آوریم، چون هر یک از این شش رقم را می‌توان به‌طور مستقل از مجموعهٔ $\{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$ انتخاب کرد. البته، حالت دوم اندکی متفاوت است، زیرا در این حالت نخستین رقم نباید صفر باشد و به این ترتیب در این حالت ۴×۵^۵ عدد به‌دست می‌آید. بنابراین پاسخ مسأله $۵^۶ + ۴ \times ۵^۵$ یا ۲۸۱۲۵ است.

۳۳. هر یک از این نامه‌ها را می‌توان به سه راه مختلف و مستقل ارسال کرد. بنابراین برای به‌دست آوردن پاسخ باید شش تا عدد ۳ را در هم ضرب کنیم و در نتیجه پاسخ مسأله $۳^۶$ یا ۷۲۹ است.

۳۴. باید از هر رنگ یک کارت داشته باشیم و کارت قرمز را می‌توان به ۱۳ راه انتخاب کرد. شمارهٔ کارت سبز نباید با شمارهٔ کارت قرمز یکی باشد و بنابراین فقط ۱۲ راه برای انتخاب آن وجود دارد. تعداد انتخابها برای کارت زرد ۱۱ و برای کارت آبی ۱۰ است. ترتیبی که رنگها در اینجا آمده‌اند در این تحلیل تأثیر ندارد.
پاسخ: $۱۳ \times ۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰$.

۳۵. برحسب اینکه در قفسه چند کتاب گذاشته شود پنج حالت در نظر می‌گیریم. اگر در قفسه فقط یک کتاب باشد، آن‌وقت می‌توان آن‌را به ۵ طریق انتخاب کرد. به ۵×۴ طریق می‌توان دو کتاب در قفسه گذاشت، چون تعداد راههای انتخاب کتاب دوم قفسه برابر با ۴ است. به‌همین ترتیب می‌توان تعداد راههای گذاشتن ۳، ۴ و ۵ کتاب را در قفسه حساب کرد. بنابراین پاسخ مسأله برابر با

$$۵ + ۵ \times ۴ + ۵ \times ۴ \times ۳ + ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ + ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

یا ۳۲۵ است.

۳۶. دقیقاً یکی از این رخها باید در هر سطر باشد. اینکه تعدادی از رخها یکدیگر را تهدید کنند یا نه فقط به انتخاب ستونهایی که رخها در آنها هستند بستگی دارد. چون شمارهٔ ستونها متعلق به مجموعهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا ۸ هستند و دو رخ وقتی و فقط وقتی ممکن است یکدیگر را تهدید کنند که در یک ستون باشند، مسأله‌مان تبدیل به همان مسألهٔ آشنایی تعداد راههای چیدن هشت شیء در یک ردیف می‌شود. بنابراین پاسخ مسأله برابر با !۸ یا ۴۰۳۲۰ است.

۳۷. این مسأله کاملاً شبیه مسألهٔ قبلی است. می‌توانیم در مسألهٔ قبلی به‌جای سطرها راست‌دستها را درنظر بگیریم و به‌جای ستونها چپ‌دستها را. در این صورت هر خانه عین یک زوج راست‌دست چپ‌دست است و هر آرایش رخها که در آن یکدیگر را تهدید نکنند یک زوجسازی راست‌دستها و چپ‌دستها برای انجام کار گروهی در کلاس به‌دست می‌دهد.

پاسخ: $n!$.

۳۸. راه‌حل مسألهٔ ۲۳ را ببینید. در اینجا شطرنج‌بازان عین رأسهای nضلعی‌اند و قطرها عین مسابقات برگزار شده.

پاسخ: $\frac{۱۸ \times ۱۷}{۲}$ یا ۱۵۳.

۳۹. پاسخهای مسأله عبارت‌اند از

الف) $\frac{۲۸ \times ۵۶ + ۲۰ \times ۵۴ + ۱۲ \times ۵۲ + ۴ \times ۵۰}{۲}$ یا ۱۷۳۶؛

ب) $\frac{۴ \times ۶۱ + ۸ \times ۶۰ + ۲۰ \times ۵۹ + ۱۶ \times ۵۷ + ۱۶ \times ۵۵}{۲}$ یا ۱۸۴۸؛

ج) $\frac{۲۸ \times ۴۲ + ۲۰ \times ۴۰ + ۱۲ \times ۳۸ + ۴ \times ۳۶}{۲}$ یا ۱۲۸۸.

برای تشریح روش کار، قسمت (الف) را ثابت می‌کنیم. درکناره‌های صفحهٔ شطرنج ۲۸ خانه وجود دارد که از هر یک از اینها نخستین فیل ۸ خانه را (از جمله خانه‌ای که در آن قرار دارد) تهدید می‌کند. بنابراین، برای دومین فیل ۵۶ خانه باقی می‌ماند. درضمن، ۲۰ خانه هم وجود دارند که مجاور خانه‌های کناره‌های صفحه‌اند. وقتی که نخستین فیل در این خانه قرارگیرد ۱۰ خانه را تهدید می‌کند و در نتیجه ۵۴ خانه می‌ماند که دومین فیل را می‌توان در آنها گذاشت. به‌همین ترتیب ۱۲ خانه هستند که از آنها نخستین فیل ۱۲ خانه را تهدید می‌کند و آخر سر به ۴ خانهٔ مرکزی صفحه می‌رسیم (که اگر نخستین فیل در این خانه‌ها قرارگیرد ۱۴ خانه را تهدید می‌کند). بعد از جمع کردن همهٔ مقادیر حاصل باید مجموع به‌دست آمده را بر دو تقسیم کنیم، چون هر یک از آرایشها را دقیقاً دوبار شمرده‌ایم (میان فیلها تمایز قائل نمی‌شویم).

۴۰. این مسأله را می‌توان به‌شکل این پرسش بیان کرد: به چند طریق می‌توان دو سیب، سه‌گلابی و چهار پرتقال را در یک ردیف چید؟ راه‌حل این مسأله درست عین راه‌حل مسأله‌های ۱۷ تا ۲۱ است.

پاسخ: $\frac{۹!}{۲!۳!۴!}$.

۴۱. پخش کردن دانشجویان در اتاقها معادل چیدنشان در یک ردیف است، چون بعد از این کار نخستین دانشجو را می‌توان فرستاد تا در اتاق یک نفره زندگی کند، دوتای بعدی را می‌توان به اتاق دو نفره فرستاد و چهار نفر باقی‌مانده را هم به اتاق چهار نفره. البته، هر یک از این توزیعها را می‌توان از چند آرایش به‌دست آورد. در واقع می‌توانیم دو دانشجویی را که درون اتاق دونفره‌اند با هم و چهار دانشجویی را هم که درون اتاق چهارنفره‌اند با هم جابه‌جا کنیم (می‌توانیم این کار را در مورد نخستین دانشجو در اتاق یک نفره هم انجام دهیم، گرچه هیچ کس متوجه این کارمان نمی‌شود). چون به ترتیب !۲ و !۴ جایگشت از دو نفر و چهار نفر امکان‌پذیر است، باید تعداد این آرایشها را (که برابر با !۷ است) بر حاصل‌ضرب !۲ و !۴ تقسیم کنیم. بنابراین پاسخ مسأله $\frac{۷!}{۱!۲!۴!}$ است.

۴۲. با استفاده از همان روش راه‌حل مسألهٔ قبلی پاسخ $\frac{۸!}{۲!۲!۲!}$ را به‌دست می‌آوریم.

۴۳. پاسخ مسأله را می‌توان به شکل مجموع چهار عدد نوشت که هر یک از آنها برابر با تعداد کلمه‌هایی است که شامل پنج حرف A و به ترتیب ۰، ۱، ۲ و ۳ حرف B‌اند: $\frac{۸!}{۵!۳!}+\frac{۷!}{۵!۲!}+\frac{۶!}{۵!۱!}+۱$ یا ۸۴.

۴۴. راهنمایی: تعداد عددهایی ده‌رقمی را حساب کنید که ویژگی موردنظر را ندارند.
پاسخ: $۹ \times ۱۰^۹ - ۹ \times ۹!$.

۴۵. چون تعداد عددهایی هفت‌رقمی که در نمایش اعشاریشان رقم ۱ اصلاً وجود ندارد برابر با ۸×۹^۶ است و $۸ \times ۹^۶ < ۹ \times ۱۰^۶ - ۸ \times ۹^۶$، نتیجه می‌گیریم که عددهایی هفت‌رقمی که در نمایش اعشاریشان رقم ۱ وجود دارد بیشترند.

۴۶. تعداد برآمدهایی که در آنها شش اصلاً نیامده است برابر با $۵^۳$ است. بنابراین پاسخ مسأله $۶^۳ - ۵^۳$ یا ۹۱ است.

۴۷. نخستین گروه دونفره را می‌توان به $\binom{۱۴}{۲}$ طریق انتخاب کرد، دومین گروه دونفره را هم به $\binom{۱۲}{۲}$ طریق و همین‌طور تا آخر. در نتیجه حاصل‌ضرب $\binom{۱۴}{۲}\binom{۱۲}{۲}\cdots\binom{۲}{۲}$ به‌دست می‌آید. اما در اینجا هر دسته‌بندی افراد !۷ بار شمرده شده است، چون هر مجموعه از ۷ گروه دونفری را به !۷ طریق (بسته به نوع شمارش این گروههای دو نفری در مجموعهٔ موردنظر) می‌توان به‌دست آورد. بنابراین پاسخ مسأله عدد

$$\frac{\binom{۱۴}{۲}\binom{۱۲}{۲}\cdots\binom{۲}{۲}}{۷!}$$

است که برابر است با

$$۱۳ \times ۱۱ \times ۹ \times ۷ \times ۵ \times ۳ \times ۱$$

۴۸. هشت رقم نخست را می‌توان به‌دلخواه انتخاب کرد. این کار را به ۹×۱۰^۷ طریق می‌توان انجام داد. آن‌وقت، آخرین رقم را همیشه می‌توان دقیقاً به ۵ طریق انتخاب کرد (اگر مجموع هشت رقم

قبلی عددی فرد باشد، آن‌وقت باید رقمی فرد انتخاب کنیم، در غیر این‌صورت آخرین رقم باید عددی زوج باشد). از این رو پاسخ مسأله $۵ \times ۱۰^۷ \times ۹$ یا ۴۵۰۰۰۰۰۰۰ است.

۳. بخش‌پذیری و باقی‌مانده‌ها

۱. پاسخ: الف) ۴؛ ب) ۶؛ ج) ۹؛ د) $(n+۱)(m+۱)$. آخرین قسمت مسأله را ثابت می‌کنیم چون تعمیمی از قسمتهای قبلی است. هر مقسوم‌علیه عدد p^nq^m به‌ازای عددهایی مانند i و j که $۰ \leqslant i \leqslant n$ و $۰ \leqslant j \leqslant m$، به‌شکل p^iq^j است. بنابراین انتخاب یک مقسوم‌علیه معادل انتخاب دو عدد صحیح است که در نابرابریهای بالا صدق می‌کنند. نخستین آنها، i، را می‌توان به $n+۱$ راه و دومی، j، را هم می‌توان به $m+۱$ راه انتخاب کرد. با ضرب کردن تعداد انتخابها پاسخ مسأله را به‌دست می‌آوریم.

۳. از قسمت (ب) قسمت (الف) نتیجه می‌شود؛ بنابراین فقط قسمت (ب) را بررسی می‌کنیم. در میان پنج عدد داده شده باید یکی از آنها بر ۳ بخش‌پذیر باشد. به همین ترتیب یکی از آنها هم باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد و دست‌کم دوتایشان عددهایی زوج‌اند که یکی از آن دو مضربی از ۴ است. اکنون اگر عددهای ۳، ۵، ۲ و ۴ را در هم ضرب کنیم عدد ۱۲۰ را به‌دست می‌آوریم و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

۴. پاسخ: الف) $p-۱$؛ ب) $p^۲-p$. حل قسمت (الف) دشوار نیست: همهٔ عددهای طبیعی کوچکتر از p نسبت به p اول‌اند. پاسخ قسمت دوم هم از توجه به این نکته به‌دست می‌آید که تنها عددهایی که نسبت به p اول نیستند مضربهای pاند و pتا از این عددها وجود دارند که از $p^۲$ کوچکتر یا با آن برابرند.

۵. چون $۹۹۰ = ۲ \times ۳^۲ \times ۵ \times ۱۱$، $n!$ باید شامل یک عامل ۱۱ باشد. چون ۱۱ عددی اول است، باید خودش در این حاصل‌ضرب بیاید؛ از این‌رو، اگر فرض کنیم $n = ۱۱$، آن‌وقت این عدد کوچکترین مقدار ممکن با ویژگی موردنظر است.

۶. اگر عددی به nتا صفر ختم شود، آن‌وقت بر ۱۰^n بخش‌پذیر است. بنابراین باید ببینیم که چند عامل ۱۰ در $۱۰۰!$ وجود دارد. اما چون $۲ \times ۵ = ۱۰$، باید ببینیم که چند عامل ۵ و ۲ در $۱۰۰!$ وجود دارد. چون ۲ از ۵ کوچکتر است، به‌ازای هر عامل ۵ به‌اندازهٔ کافی عامل ۲ وجود دارد که با آن عامل ۱۰ بسازد. در نتیجه فقط لازم است که عاملهای ۵ را بشماریم.

چون $۵ \times ۲۰ = ۱۰۰$، ۲۰تا مضرب ۵ در حاصل‌ضرب $۱ \times ۲ \times ۳ \times \cdots \times ۹۹ \times ۱۰۰$ وجود دارد. اما تعداد عاملهای ۵ بیشتر از این است، چون هر یک از عددهای ۲۵، ۵۰، ۷۵ و ۱۰۰ دوتا عامل پنج دارند که اینها چهارتا عامل ۵ «اضافی» ایجاد می‌کنند. بنابراین ۲۴ عامل ۵ و در نتیجه ۲۴ عامل ۱۰ وجود دارد و در نتیجه حاصل‌ضرب $۱۰۰!$ به ۲۴ صفر ختم می‌شود.

سؤال. نمایش اعشاری عدد !۱۰۰۰ به چند صفر ختم می‌شود؟

۷. به آسانی می‌توان دریافت که عدد !۲۴ به چهارتا صفر ختم می‌شود و عدد !۲۵ به شش‌تا صفر. فهمیدن اینکه وقتی مقدار n افزایش می‌یابد تعداد صفرهای سمت راست عدد $n!$ ممکن نیست کاهش یابد چندان دشوار نیست. از این رو پاسخ مسأله‌مان خیر است.

۸. کل مقسوم‌علیه‌های عدد n را به زوجهایی به شکل $\left(d, \frac{n}{d}\right)$ تقسیم می‌کنیم. تنها مشکل در اینجا این است که عضوهای یکی از زوجها ممکن است یکی باشند. به هر حال این حالت وقتی و فقط وقتی ممکن است پیش آید که n مربع کامل باشد؛ به این ترتیب اثبات مسأله کامل می‌شود.

۹. تام باید جایی اشتباه کرده باشد: عدد طرف راست تساوی مضربی از ۱۱ است، اما هیچ‌یک از عددهای طرف چپ تساوی این‌طور نیست. چون ۱۱ عددی اول است، چنین چیزی غیرممکن است.

توجه کنید که قرار گرفتن این مسأله در مجموعه‌ای از تمرینهای دربارهٔ بخش‌پذیری نوعی راهنمایی برای حل آن است. اگر این مسأله خارج از این بخش مطرح می‌شد حل کردن آن دشوارتر بود.

۱۱. ابتدا ملاحظه کنید که

$$۶۵(a+b) = ۶۵a + ۶۵b = ۶۵a + ۵۶a = ۱۲۱a$$

چون عددهای ۶۵ و ۱۲۱ نسبت به هم اول‌اند، پس $a+b$ بر ۱۲۱ که عددی مرکب است بخش‌پذیر است. بنابراین $a+b$ هم عددی مرکب است.

۱۲. پاسخ: الف) $x = ۱۶$ و $y = ۱۵$؛ ب) $x = ۱۵۲$ و $y = ۱۵۱$ یا $x = ۵۲$ و $y = ۴۹$؛ برای اثبات قسمت (الف) معادلهٔ داده شده را این‌طور می‌نویسیم: $(x-y)(x+y) = ۳۱$. چون ۳۱ عددی اول است، عامل کوچکتر باید ۱ باشد و عامل بزرگتر ۳۱. بنابراین دستگاه معادلات

$$\begin{cases} x - y = ۱ \\ x + y = ۳۱ \end{cases}$$

به‌دست می‌آید که از حل آن پاسخ بالا نتیجه می‌شود.

۱۳. می‌توان نوشت $x(x^۲ + x + ۱) = ۳$. در نتیجه $x = \pm ۱$ یا $x = \pm ۳$. بعد از تحلیل همهٔ حالتها می‌فهمیم که $x = ۱$.

۱۴. راهنمایی: بررسی کنید که هر دو طرف این تساوی بر توانهای عین هم هر عدد اول مانند p بخش‌پذیرند.

۱۵. پاسخ: الف) ۰ (باقی‌مانده‌های تقسیم عددهای ۱۹۸۹، ۱۹۹۰، ۱۹۹۱ و $۱۹۹۲^۳$ بر ۷ به‌ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۱ اند)؛ ب) ۱، چون باقی‌ماندهٔ تقسیم ۹ بر ۸ برابر با ۱ است.

۱۷. راهنمایی: باقی‌مانده‌های تقسیم عددها بر ۵ را تحلیل کنید.

۱۸. راهنمایی: باقی‌مانده‌های تقسیم عددها بر ۳ را تحلیل کنید.

۱۹. راهنمایی: باقی‌مانده‌های تقسیم عددها بر ۹ را تحلیل کنید.

۲۱. الف) ثابت می‌کنیم که عددهای داده شده بر ۳ و ۸ بخش‌پذیرند. می‌توان نوشت

$$p^۲ - ۱ = (p - ۱)(p + ۱)$$

اگر p عددی اول و بزرگتر از ۳ باشد، آن‌وقت p عددی فرد است. از این رو عددهای $p - ۱$ و $p + ۱$ هر دو زوج‌اند و یکی از آنها مضربی از ۴ است. پس نتیجه می‌شود که $p^۲ - ۱$ بر ۸ بخش‌پذیر است. علاوه‌بر این، چون $p - ۱$، p و $p + ۱$ سه عدد صحیح متوالی‌اند، یکی از آنها بر ۳ بخش‌پذیر است. اما این عدد، عدد اول p نیست و در نتیجه باید یا $p - ۱$ باشد یا $p + ۱$. بنابراین $p^۲ - ۱$ بر عددهای ۳ و ۸ و در نتیجه بر ۲۴ بخش‌پذیر است.

ب) می‌توان نوشت $p^۲ - q^۲ = (p - q)(p + q)$. اگر عین قسمت قبلی استدلال کنیم درمی‌یابیم که هر دو عامل طرف راست تساوی عددهایی زوج‌اند. برای اثبات اینکه یکی از آنها مضربی از ۴ است، خلاف آن را فرض می‌کنیم؛ یعنی فرض می‌کنیم که باقی‌مانده‌های تقسیم این عددها بر ۴، ۲ باشد. در این صورت مجموعشان باید بر ۴ بخش‌پذیر باشد. از طرف دیگر، مجموعشان $۲p$ می‌شود که مضربی از ۴ نیست، چون p عددی فرد است.

علاوه بر این، باقی‌مانده‌های عددهای p و q به‌پیمانهٔ ۳ یا برابرند یا متمایز. در حالت نخست تفاضلشان بر ۳ بخش‌پذیر است و در حالت دوم مجموعشان. به این ترتیب ثابت می‌شود که $(p - q)(p + q)$ بر ۳ و ۸ بخش‌پذیر است.

۲۲. اگر هیچ‌یک از عددهای x و y بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، آن‌وقت باقی‌مانده‌های تقسیم $x^۲$ و $y^۲$ بر ۳ برابر با ۱ است. بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموعشان بر ۳ برابر با ۲ می‌شود که در مورد مربعهای کامل چنین چیزی ممکن نیست.

۲۳. راهنمایی: بررسی کنید که عددهای a و b هر دو بر ۳ و ۷ بخش‌پذیرند.

۲۴. راهنمایی: بررسی کنید که باقی‌مانده‌های تقسیم عددهای $x^۳$ و x بر ۶ با هم برابرند.

۲۵. اگر d عددی فرد باشد، آن‌وقت از عددهای p و q یکی زوج است که چنین چیزی ممکن نیست. اگر d بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، آن‌وقت از عددهای p، q و r یکی بر ۳ بخش‌پذیر است که این هم باز تناقض است.

۲۶. راهنمایی: همهٔ باقی‌مانده‌های ممکن تقسیم مربعهای کامل بر ۸ را پیدا کنید.

۲۷. باقی‌مانده‌های ممکن تقسیم مربعهای کامل بر ۹ اینها هستند: ۰، ۱، ۴ و ۷. بررسی کنید که اگر مجموع یک سه‌تایی از این باقی‌مانده‌ها بر ۹ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت دوتایشان با هم برابرند.

۳۰. با استفاده از روش مسألهٔ ۲۸ می‌فهمیم که پاسخ مسأله عدد ۷ است.

۳۱. پاسخ: ۱.

۳۲. پاسخ: ۶.

۳۴. پاسخ: ۳.

راهنمایی: رقمهای یکان عددهای 7^n دوری به طول ۴ تشکیل می‌دهند. باید تعیین کنیم که 7^7 چه‌وقت در این دور می‌آید؛ یعنی باید باقی‌ماندهٔ تقسیم 7^7 بر ۴ را پیدا کنیم.

۳۵. راهنمایی: از این عددها یکی همیشه بر ۳ بخش‌پذیر است.

پاسخ: الف) $p = 3$؛ ب) $p = 3$.

۳۶. پاسخ: $p = 3$. روش حل مسألهٔ قبلی در اینجا هم به کار می‌آید.

۳۷. راهنمایی: با استفاده از همان شگرد مسأله‌های قبلی ثابت کنید که $p = 3$.

۳۸. راهنمایی: باقی‌مانده‌های تقسیم عددها بر ۳ را تحلیل کنید.

۳۹ و ۴۰. راهنمایی: بررسی کنید که باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع عددی فرد بر ۴ همیشه ۱ می‌شود و باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع عددی زوج بر ۴ همیشه ۰.

پاسخ: الف) خیر؛ ب) خیر.

۴۱. پاسخ: $p = 5$. باقی‌مانده‌های تقسیم عددها بر ۵ را تحلیل کنید.

۴۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد بر ۹ برابر با ۷ می‌شود و چنین چیزی در مورد مکعبهای کامل درست نیست.

۴۳. راهنمایی: همهٔ باقی‌مانده‌های ممکن تقسیم عدد $a^3 + b^3 + 4$ بر ۹ را پیدا کنید.

۴۴. راهنمایی: همهٔ باقی‌مانده‌های ممکن تقسیم عدد $6n^3 + 3$ بر ۷ را پیدا کنید.

۴۵. اگر هیچ‌یک از عددهای x یا y بر ۳ بخش‌پذیر نباشد، آن‌وقت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد z^2 بر ۳ برابر با ۲ می‌شود که ممکن نیست. اکنون توجه کنید که باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع عددی فرد بر ۸ همیشه ۱ است؛ باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع عددی زوج، که بر ۴ بخش‌پذیر نیست، بر ۸، همیشه ۴ می‌شود و آخر سر باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع مضربی از ۴ بر ۸ همیشه ۰ است. با استفاده از اینها می‌توانیم ثابت کنیم که یا عددهای x و y هر دو زوج‌اند یا از آنها یکی بر ۴ بخش‌پذیر است.

۴۶. راهنمایی: الف) $3a + 4(a+1) = 7a + 4$؛ ب) $a + b = (2+a) - (35-b) + 33$.

۴۷. پاسخ: ۰. ابتدا رقم یکان عدد $0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + 9^2$ را حساب کنید. بعد توجه کنید که به‌ازای هر مجموعه از ده عدد طبیعی متوالی رقم یکان همیشه همان عددی که حساب کردید می‌شود.

۴۸. ثابت کنید باقی‌مانده‌های تقسیم هر دو عدد از هفت عدد موردنظر، مثلاً x و y، بر ۵ با هم برابرند. برای این کار دو تا شش‌تایی از این عددها را درنظر بگیرید؛ اولی شامل همهٔ این عددها بجز x باشد و دومی شامل همهٔ این عددها بجز y.

۴۹. اولین عدد از این عددها را با a نشان می‌دهیم؛ در این صورت

$$\begin{aligned} a+(a+2)+(a+4)+\cdots+(a+2(n-1)) &= na+2(1+2+3+\cdots+(n-1)) \\ &= na+n(n-1) \\ &= n(a+n-1) \end{aligned}$$

۵۰. توجه کنید که اگر به عدد موردنظر ۱ را اضافه کنیم، آن‌وقت عدد حاصل بر عددهای ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ بخش‌پذیر می‌شود. بنابراین پاسخ مسأله کوچکترین مضرب مشترک این عددها منهای یک است، که می‌شود ۵۹.

۵۱. اگر n عددی مرکب و بزرگتر از ۴ باشد، آن‌وقت عدد $(n-1)!$ بر n بخش‌پذیر است. در حقیقت، $n = kl$ که در آن عددهای k و l از n کوچکترند. اگر $k \neq l$، آن‌وقت در حاصل‌ضرب $(n-1)!$ این عددها هر دو به‌عنوان عامل می‌آیند و آنچه می‌خواستیم ثابت می‌شود. اگر هم که $k = l$، یعنی $n = k^2$، که در آن $k > 2$، آن‌وقت حاصل‌ضرب $(n-1)!$ شامل عاملهای k و $2k$ است و کار تمام است.

۵۵. با استفاده از الگوریتم اقلیدسی به‌دست می‌آوریم

$$(30n+2, 12n+1) = (12n+1, 6n) = (6n, 1) = 1$$

۵۶ و ۵۷. راهنمایی: از الگوریتم اقلیدسی استفاده کنید.
پاسخ: به‌ترتیب $2^{20} - 1$ و ۱۱...۱۱۱ (بیست‌تا ۱ در این عدد آمده است).

۴. اصل لانه‌کبوتری

۳. در اینجا لانه‌ها باقی‌مانده‌های تقسیم عددها بر ۱۱اند و کبوترها هم عددهای موردنظر (راه‌حل مسألهٔ ۲۱ را هم ببینید). اگر باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد بر ۱۱ یکی باشند، آن‌وقت تفاضلشان بر ۱۱ بخش‌پذیر است.

۴. در اینجا لانه‌ها تعداد موهای سر اشخاص است (از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰). کبوترها هم شهروندان لنینگرادند.

۶. فوتبالیستها را بعد از ترک کردن هواپیماهایشان در تیمهای خود دسته‌بندی می‌کنیم. در آن موقع $10M + 1$ بازیکن را باید دسته‌بندی کنیم. بنابر اصل لانه‌کبوتری تعمیم‌یافته اطمینان می‌یابیم که یک تیم وجود دارد که ۱۱ بازیکن دارد و این تیم کامل است.

۸. تعداد دوستان هرکس در این گروه یکی از پنج عدد ۰، ۱، ۲، ۳ یا ۴ است. از این‌رو، به‌نظر می‌رسد که تعداد دوستان این پنج نفر ممکن است همگی عددهایی متمایز باشند. با وجود این، اگر شخصی از این گروه چهار تا دوست داشته باشد آن‌وقت هیچ‌کسی نیست که هیچ دوستی نداشته باشد. بنابراین تعداد دوستان دو نفر از اینها یکی است.

۹. اگر در این مسابقات k تیم شرکت کرده باشند، آن‌وقت تعداد مسابقاتی که هر تیم تا آن لحظه برگزار کرده است یکی از عددهای ۰ تا $k - 1$ است. با وجود این، اگر یکی از تیمها $k - 1$ مسابقه برگزارکرده باشد، آن‌وقت این تیم با همهٔ تیمهای دیگر بازی کرده است و از این‌رو هیچ تیمی نیست که اصلاً بازی نکرده باشد. بنابراین k تیم را در $k - 1$ لانه‌ای جا می‌دهیم که شماره‌هایشان یا عددهای از ۰ تا $k - 2$اند یا عددهای از ۱ تا $k - 1$.

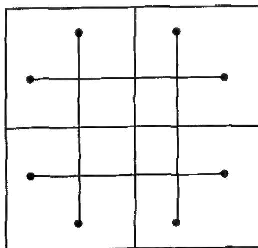
۱۰. الف) پاسخ: ۳۲. در حقیقت فرض کنید ۳۳ یا تعدادی بیشتر خانه را سبز کرده باشیم. در این صورت بعد از اینکه صفحهٔ شطرنج را به شانزده مربع ۲ × ۲ تقسیم می‌کنیم، بنابر اصل لانه‌کبوتری اطمینان می‌یابیم که دست‌کم یکی از این مربعها شامل ۳ یا تعدادی بیشتر خانهٔ سبز است. این ۳ خانهٔ سبز در وضعیتی سه‌مربعی «غیر مجاز» تشکیل می‌دهند و به‌این ترتیب به تناقض می‌رسیم. از طرف دیگر، می‌توانیم همهٔ خانه‌های سیاه (در رنگ‌آمیزی عادی صفحهٔ شطرنج) را سبز کنیم و ۳۲ خانهٔ سبز با ویژگی خواسته شده به‌دست بیاوریم.

۱۰. ب) **پاسخ**: باز هم ۳۲!. در واقع اگر ۳۱ یا تعدادی کمتر خانه را سبز کنیم، آن وقت یکی از آن شانزده مربع ۲ × ۲ (راه‌حل قسمت (الف)) یا شامل یک خانهٔ سبز است یا اصلاً شامل هیچ خانهٔ سبزی نیست. در این‌صورت ۳ خانهٔ دیگر آن یا هیچ‌یک از ۴ خانه‌اش سبز نیستند و سه‌مربعی فاقد خانهٔ سبز تشکیل می‌دهند. با این تناقض (و همان رنگ‌آمیزی خانه‌های سیاه در راه‌حل قسمت (الف)) اثبات کامل می‌شود.

۱۱. ابتدا توجه کنید که ۳ + ۲ + ۱ یا ۶تا از مسأله‌ها را سه دانش‌آموزی حل کرده‌اند که در صورت مسأله به‌آنها اشاره شده است. بنابراین ۲۹ مسأله می‌ماند که ۷ دانش‌آموز دیگر باید آنها را حل کرده باشند. اگر هر یک از این دانش‌آموزان فقط ۴ مسأله را حل کرده باشد، آن‌وقت باید فقط ۲۸ مسأله حل می‌شد. بنابراین یکی از آنها باید دست‌کم ۵ مسأله را حل کرده باشد.

۱۲. **پاسخ**: ۱۶ شاه. راهنمایی مسألهٔ ۱۰ (الف) را ببینید.

۱۳. تار عنکبوت را همان‌طور که در شکل ۱۳۵ نشان داده شده است به ۴ قطعه تقسیم کنید؛ روی هریک از این قطعه‌ها بیش از یک عنکبوت نمی‌تواند زندگی کند.



شکل ۱۳۵

۱۴. با هر یک از مثلثهای کوچکتر فقط یک رأس مثلث بزرگتر را می‌توان پوشاند.

۱۸. همهٔ نقاط خشکی را قرمز و هر نقطهٔ متقاطر آنها را سبز می‌کنیم. در این صورت نقطه‌ای وجود دارد که هم قرمز است و هم سبز. حفر تونل را از این نقطه آغاز کنید. آیا متوجه می‌شوید که این راه‌حل هم به تعبیری اصل لانه‌کبوتری است؟

۱۹. در تقسیم عددها بر ۱۹۸۷ فقط یکی از ۱۹۸۷ باقی‌ماندهٔ ممکن به‌دست می‌آید. اکنون اگر مثلاً ۱۹۸۸ توان نخست ۲ را بررسی کنیم در می‌یابیم که باقی‌ماندهٔ تقسیم دو تا از آنها بر ۱۹۸۷ یکی است. در این صورت تفاضل این دو توان مضربی از ۱۹۸۷ است.

۲۰. چون باقی‌مانده‌های تقسیم عددهای $x^۲$ و $(x - ۱۰۰)^۲$ بر ۱۰۰ یکی است، در تقسیم مربعهای کامل بر ۱۰۰ فقط ۵۱ باقی‌ماندهٔ متمایز وجود دارد. از این‌رو، از ۵۲ عدد صحیح، باقی‌مانده‌های تقسیم مربعهای دوتایشان بر ۱۰۰ یکی است.

۲۲. اگر ۳^m و ۳^n (که در آن $m > n$) دو توانی از ۳ باشند که باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۱۰۰۰ یکی است، آن‌وقت تفاضلشان بر ۱۰۰۰ بخش‌پذیر است. اکنون توجه کنید که $۳^m - ۳^n = ۳^n(۳^{m-n} - ۱)$ و عاملهای اول ۱۰۰۰ عددهای ۲ و ۵اند که هیچ‌کدامشان ۳^n را نمی‌شمارد. بنابراین نتیجه می‌شود که ۱۰۰۰ باید $۳^{m-n} - ۱$ را بشمارد، یعنی ۳^{m-n} توانی از ۳ است که به رقمهای ۰۰۱ ختم می‌شود.

۲۳. مقدار هر یک از این مجموعها یکی از هفت عدد از ۳− تا ۳ است.

۲۴. کل این افراد را به ۵۰ جفت که دو سر یک قطر میز روبه‌روی هم نشسته‌اند تقسیم کنید. این جفتها را لانه‌ها درنظر بگیرید. چون بیش از ۵۰ نفرشان مردند، یکی از این جفتها باید شامل بیش از یک مرد باشد.

۲۵. روشن است که اگر حکم مسأله درست نباشد، آن‌وقت این پسرها دست‌کم $۱۴ + \cdots + ۲ + ۱ + ۰$ یا ۱۰۵ گردو جمع‌آوری می‌کردند که تناقض است.

۲۶. حاصل‌ضرب عددهای همهٔ این گروهها برابر با !۹ یا ۳۶۲۸۸۰ است. اگر حاصل‌ضرب عددهای هیچ‌یک از گروهها از ۷۱ بیشتر نباشد، آن‌وقت حاصل‌ضرب همهٔ این عددها حداکثر برابر با $۷۱^۳$ یا ۳۵۷۹۱۱ می‌شود. در اینجا باید توجه کرد که این روش اثبات از جهتی از شکل سادهٔ اصل لانه‌کبوتری کلیتر است.

۲۷. از هر خانهٔ این جدول می‌توان با عبور از خانه‌های مجاور به هر خانهٔ دیگرش رفت و برای این کار همیشه مسیری را انتخاب می‌کنیم که در آن تعداد خانه‌هایی که از آنها می‌گذریم از ۱۹ کمتر باشد. یعنی اینکه اگر a کوچکترین عدد جدول باشد، همهٔ عددها میان a و $a + ۹۵$ هستند. بنابراین در میان ۱۰۰ عدد جدول بیش از ۹۶ عدد متمایز وجود ندارد و دوتایشان باید با هم برابر باشند.

۲۸. از این گروه یک نفر دلخواه را انتخاب می‌کنیم و او را باب می‌نامیم. افراد دیگر را در دو لانه دسته‌بندی

می‌کنیم: آنهایی که باب را می‌شناسند و آنهایی که او را نمی‌شناسند. از پنج نفر باقی‌مانده دست‌کم سه نفرشان در یکی از این دسته‌ها قرار می‌گیرند. فرض کنید باب سه نفر آشنا داشته باشد. اگر از اینها دوتایشان یکدیگر را بشناسند، آن‌وقت آنها به همراه باب سه نفر موردنظرند. اگر هیچ‌یک از آنها یکدیگر را نشناسند، آن‌وقت خود آنها سه نفر موردنظرند. در صورتی که سه نفر باشند که باب آنها را نشناسد، می‌توان استدلالی مشابه را به‌کار برد.

۲۹. زوجیت (باقی‌ماندهٔ تقسیم بر ۲) مختصات این نقطه‌ها را درنظر بگیرید. چهار امکان وجود دارد: (فرد و فرد)؛ (زوج و فرد)؛ (فرد و زوج)؛ (زوج و زوج). چون پنج نقطه داریم، می‌توانیم دوتایشان را انتخاب کنیم که زوجیت هر دو مختصشان یکی باشد. اکنون به سادگی می‌توان فهمید که مختصات وسط پاره‌خط میان آنها هم عددهایی صحیح‌اند.

۳۰. این سه شماره لنگه پوتین را می‌توانیم در دو دسته جا دهیم: آن شماره‌هایی که از لنگه‌های راستشان بیشتر از لنگه‌های چپشان داریم، و دیگری آن شماره‌هایی که از لنگه‌های چپشان بیشتر از لنگه‌های راستشان داریم (اگر هم که تعداد لنگه‌های راست و چپ شماره‌ای با هم برابر باشند آن شماره پوتینها را در دستهٔ دوم قرار می‌دهیم). در این صورت نتیجه می‌شود که دو شماره لنگه پوتین در یک دسته‌اند. فرض می‌کنیم، مثلاً، شماره‌های ۴۱ و ۴۲ لنگه‌های راستشان بیشتر از لنگه‌های چپشان باشد (در صورتی که لنگه‌های چپ این دو شماره بیشتر از لنگه‌های راستشان باشند، می‌توان استدلالی مشابه را به‌کار برد).

اکنون درکل ۳۰۰ لنگهٔ چپ و از هر شماره حداکثر ۲۰۰ لنگهٔ چپ داریم. بنابراین مجموع تعداد لنگه‌های چپ هر دو شماره دست‌کم ۱۰۰ است. به این ترتیب ثابت کرده‌ایم که (روی هم) دست‌کم ۱۰۰ لنگهٔ چپ از شماره‌های ۴۱ و ۴۲ داریم و لنگه‌های راست هر یک از این شماره‌ها بیشتر از لنگه‌های چپشان است. از این‌رو، برای هر یک از لنگه‌های چپ یک لنگه راست وجود دارد و در نتیجه در این انبار دست‌کم ۱۰۰ جفت پوتین کامل می‌توان پیدا کرد.

۳۱. در این الفبا حروف بی‌صدا یازده تا بیشتر از حروف صدادارند. بنابراین اگر تفاضلهای تعداد حروف بی‌صدا و تعداد حروف صدادار هر یک از این شش زیرمجموعه را با هم جمع کنیم، مجموعشان ۱۱ می‌شود. پس نتیجه می‌شود که این تفاضل در دست‌کم یکی از این زیرمجموعه‌ها از ۲ کمتر است و بنابراین با حروف این زیرمجموعه می‌توان کلمه‌ای از این زبان را ساخت.

۳۲. ده مجموع

$$x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots, x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}$$

را در نظر بگیرید. باقی‌مانده‌های تقسیم دوتا از اینها بر ۱۰ با هم برابرند. تفاضل این دو مجموع مجموعه‌ای به‌دست می‌دهد که مجموع عضوهایش بر ۱۰ بخش‌پذیر است.

۳۳. عددهای از ۱ تا ۲۰ را به ده مجموعهٔ جدا از هم طوری تقسیم می‌کنیم که اگر دو عدد دلخواه از یکی از این مجموعه‌ها انتخاب شوند، یکی از آنها دیگری را بشمارد: {۱۱}، {۱۳}، {۱۵}، {۱۷}، {۱۹}، {۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶}، {۳, ۶, ۱۲}، {۵, ۱۰, ۲۰}، {۷, ۱۴}، {۹, ۱۸}. در این صورت از هر یازده عددی که از ۲۰ بزرگتر نباشند، دوتایشان در یکی از این لانه‌ها قرار می‌گیرند و در نتیجه یکی از آن دو دیگری را می‌شمارد.

۳۴. گروههای پژوهش موردنظر را با عددهای از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم. در این صورت به‌جای در نظر گرفتن خود هر دانش‌آموز می‌توانیم مجموعهٔ شماره‌های گروههای پژوهشی را در نظر بگیریم که عضوشان است. هر یک از اینها زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ {۱, ۲, ۳, ۴, ۵} است. اکنون مسأله این‌طور حل می‌شود که کل ۳۲ زیرمجموعهٔ این مجموعه را به ۱۰ گردایه طوری تقسیم می‌کنیم که اگر دو تا از این زیرمجموعه‌ها از یکی از این گردایه‌ها انتخاب شوند، یکی از آنها شامل دیگری باشد (این راه‌حل را با راه‌حل مسألهٔ ۳۳ مقایسه کنید). در زیر، گردایه‌هایی از این دست را آورده‌ایم. زیرمجموعه‌ها در هر گردایه مانند عددها نوشته شده‌اند:

[∅, {۱}, {۱, ۲}, {۱, ۲, ۳}, {۱, ۲, ۳, ۴}, {۱, ۲, ۳, ۴, ۵}],

[{۲}, {۲, ۵}, {۱, ۲, ۵}, {۱, ۲, ۳, ۵}],

[{۳}, {۱, ۳}, {۱, ۳, ۴}, {۱, ۳, ۴, ۵}],

[{۴}, {۱, ۴}, {۱, ۲, ۴}, {۱, ۲, ۴, ۵}],

[{۵}, {۱, ۵}, {۱, ۳, ۵}],

[{۲, ۴}, {۲, ۴, ۵}, {۲, ۳, ۴, ۵}],

[{۳, ۴}, {۳, ۴, ۵}],

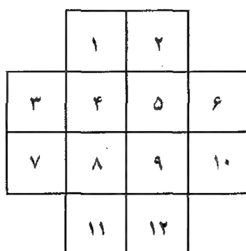
[{۳, ۵}, {۲, ۳, ۵}],

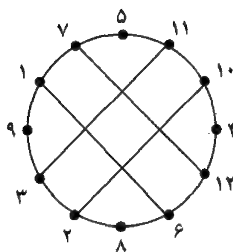
[{۴, ۵}, {۱, ۴, ۵}],

[{۲, ۳}, {۲, ۳, ۴}]

۵. گرافها ـ ۱

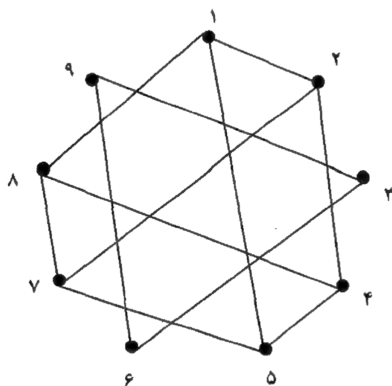
۳. بله، ممکن است. مثلاً شکل ۱۳۶ را ببینید که در آن گرافی شبیه گراف راه‌حل مسألهٔ ۲ رسم شده است. با توجه به این شکل به‌راحتی می‌توان مثالی از مسیری را که در شرطهای مسأله صدق کند ساخت.





شکل ۱۳۶

۴. اگر عدد AB بر ۳ بخش‌پذیر باشد، آن‌وقت عدد BA هم چنین است. یعنی اینکه اگر مسافری بتواند به‌طور مستقیم از شهر A به شهر B برود، آن‌وقت می‌تواند از شهر B هم به‌طور مستقیم به شهر A برود. با این ملاحظه می‌توانیم گراف خطوط هوایی موجود را مانند شکل ۱۳۷ رسم کنیم. همان‌طور که از این شکل پیداست، این‌طور نیست که مسافری بتواند از هر شهر به هر شهر دیگری که دلش خواست برود. مثلاً او نمی‌تواند از شهر ۱ به شهر ۹ برود.



شکل ۱۳۷

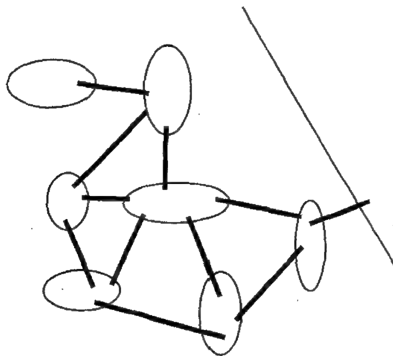
۷. گرافی بکشید که در آن شهرها رأسهای گراف باشند و جاده‌ها یالهایش. در این صورت می‌توانیم یالهای این گراف را با استفاده از روشی که در مسألهٔ ۶ شرح داده شد بشماریم. در مسأله بیان شده است که درجهٔ هر رأس ۴ است و از این‌رو تعداد کل جاده‌ها برابر با $\frac{۱۰۰ \times ۴}{۲}$ یا ۲۰۰ است.

۹. هر طوری که سیم‌کشی کنیم ممکن نیست هیچ‌یک از وضعیتهای (الف) و (ب) به‌دست آید. در هر یک از این حالتها می‌توانیم گرافی شبیه گرافهای مسألهٔ ۵ را مجسم کنیم و رأسهای فردش را بشماریم. در این صورت متوجه می‌شویم که تعداد رأسهای فرد در اینجا عددی زوج نیست و در نتیجه چنین گرافی را نمی‌توان رسم کرد.

۱۰. **پاسخ**: خیر. در اینجا می‌توانیم گرافی را مجسم کنیم که رأسهایش کشورهای تحت‌سلطهٔ پادشاه باشند و از میان آنها کشورهای همسایه با یال به هم وصل شده باشند. با شمارش رأسهای فرد معلوم می‌شود که تعدادشان زوج نیست و در نتیجه چنین گرافی را نمی‌توان رسم کرد.

۱۱. **پاسخ**: خیر. اگر این کشور k شهر داشته باشد، آن‌وقت در آن $\frac{۳k}{۲}$ جاده وجود دارد. اما اگر k عددی صحیح باشد، آن‌وقت این عدد برابر با ۱۰۰ نمی‌شود.

۱۲. **پاسخ**: بله، درست است. فرض کنید این‌طور نباشد. گرافی رسم کنید که رأسهایش جزیره‌های موردنظر باشند و یالهایش پلهای میان این جزیره‌ها. بنابر آنچه که در مسأله آمده است، هر یک از این هفت جزیره رأسی فرد است و بنابراین در اینجا تعداد رأسهای فرد عددی فرد است. چون چنین چیزی ممکن نیست، باید دست‌کم یک یال این گراف به ساحل دریاچه منتهی شود. در شکل ۱۳۸ گرافی نشان داده شده است که وضعیتی ممکن از آن چیزی است که جان توصیف کرده بود.



شکل ۱۳۸

۱۳. گرافی بسیار بزرگ را مجسم کنید که رأسهایش انسانهای از ابتدای خلقت تاکنون و یالهایش دست‌دادنهای افرادند. اکنون رأسهای فرد این گراف را می‌شماریم و بنابر قضیه‌مان اطمینان می‌یابیم که تعدادشان عددی زوج است.

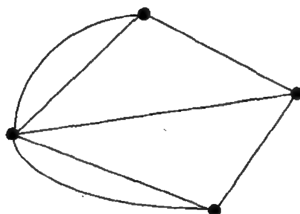
۱۴. **پاسخ**: خیر. دشواری این مسأله اینجاست که تعیین کنیم چطور گراف موردنظر را بکشیم. اینکه خود این پاره‌خطها را یالهای گراف درنظر بگیریم احتمالاً مؤثر واقع نخواهد شد (این ایده ممکن است در ابتدا بعضی از دانش‌آموزان را سردرگم کند). در عوض می‌توانیم گرافی را درنظر بگیریم که رأسهایش این پاره‌خطها باشند (!) و میان هر دو رأسش وقتی و فقط وقتی یالی وجود دارد که پاره‌خطهای متناظر این دو رأس یکدیگر را قطع کنند. در این صورت این گراف کلاً نه رأس درجهٔ ۳ دارد که ممکن نیست.

۱۶. در اینجا می‌توانیم راه‌حل مسألهٔ ۱۵ را تعمیم دهیم. فرض کنید چنین گرافی همبند نباشد. بی‌شک این گراف از کمتر از دو شهر تشکیل نشده است (چطور ممکن است یک شهر تکی همبند نباشد؟). دو شهری را انتخاب کنید که ظاهراً نمی‌توان آنها را با مسیری به هم وصل کرد. همهٔ شهرهایی را درنظر بگیرید که از این دو شهر جاده‌هایی مستقیم به آنها وجود دارد. تعداد این شهرها دست‌کم $\frac{۲(n-۱)}{۲}$ یا $n-۱$ است. مانند مسألهٔ قبلی این شهرهای جدید باید همگی متمایز باشند: اگر دو تا از این شهرهای جدید یکی باشند، دو شهر انتخاب شده را می‌توان با مسیری که از این شهر جدید می‌گذرد به‌هم وصل کرد. از این رو گراف موردنظر $n-۱+۲$ یا $n+۱$ شهر دارد که تناقض است. در نتیجه، این گراف همبند است.

در اینجا باز روشن است که دانش‌آموزان باید بکوشند که گراف موردنظر را رسم کنند. آنها فوراً متوجه می‌شوند که این گراف «آن‌قدر یالهایش زیاد است» که ممکن نیست همبند نباشد. این شهود را می‌توان نقطهٔ آغازی برای بحثی جدی دربارهٔ این نتیجه دانست.

۱۸. اگر جادهٔ AB بسته باشد، آن‌وقت کافی است ثابت کنیم که باز هم می‌توانیم از شهر A به شهر B برویم. اگر این‌طور نباشد، آن‌وقت در مؤلفهٔ همبند شامل A همهٔ رأسها بجز A زوج‌اند. این وضعیت یعنی وجود دقیقاً یک رأس فرد در مؤلفه‌ای همبند، که با قضیه‌مان در مورد تعداد رأسهای فرد گراف تناقض دارد.

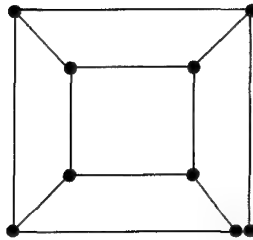
۲۰. پاسخ: خیر، چنین گردشی ممکن نیست. جزیره‌ها و کناره‌ها را رأسهای گراف در نظر می‌گیریم و پلها را یالهایش. همان‌طور که از شکل ۱۳۹ پیداست، این گراف ۴ رأس فرد دارد که بیش از اندازه زیاد است.



شکل ۱۳۹

۲۱. پاسخ: الف) شش پل؛ ب) پنج پل؛ ج) چهار پل. دانش‌آموزان فقط باید تعداد پلهایی را که در هر مورد برای رفتن به جزیرهٔ سه دفعه استفاده می‌شوند بشمارند.

۲۲. الف) این کار شدنی نیست. ابتدا توجه کنید که چون مجموع طولهای همهٔ یالها ۱۰×۱۲ یا ۱۲۰ سانتیمتر است، این سیم را نمی‌توان در جایی روی خودش دولا کرد (حتی اگر از همهٔ طول سیم استفاده کرد). گراف اسکلت مکعب را رسم می‌کنیم (شکل ۱۴۰)، اگر بتوان



شکل ۱۴۰

اسکلت سیمی موردنظر را ساخت، آن وقت می‌توان روی این سیم پیش رفت وگراف را بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم کرد. اما این گراف هشت رأس فرد دارد که این تعداد بیش از آن است که رسم گراف به این شکل ممکن باشد. بنابراین تکه سیم را نمی‌توان آن‌طورکه خواسته شده است خم کرد.

ب) چون گراف اسکلت مکعب ۸ رأس فرد دارد، باید دست‌کم چهارتا از این تکه سیمها داشته باشیم.

۶. نابرابری مثلث

۱. فرض کنید $BC \geqslant AB$. اگر نقطه‌های A، B و C مثلثی تشکیل دهند، آن‌وقت بنابر نابرابری مثلث، $AC + BC > AB$، که از این نابرابری نتیجهٔ موردنظر به‌دست می‌آید. اگر $AB \leqslant BC$، آن‌وقت می‌توانیم از نابرابری $AB + AC > BC$ (که این هم بنابر نابرابری مثلث درست است) به همان نتیجه برسیم.

حالت تساوی هم وقتی و فقط وقتی پیش می‌آید که نقطه‌های A، B و C روی یک خط راست باشند و B میان A و C نباشد.

۲. طول ضلع BC باید از $AC + AB$ یا ۴٫۴ کمتر باشد. از طرف دیگر، طول BC باید از $|AB - AC|$ یا ۳٫۲ بزرگتر باشد (مسألهٔ ۱ را ببینید). تنها عدد صحیح در این محدوده ۴ است.

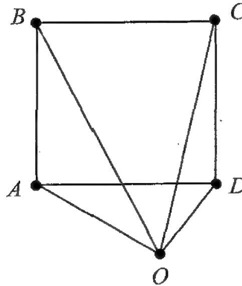
۳. اگر طول ضلعهای مثلث عددهای a، b و c باشند، آن‌وقت بنابر نابرابری مثلث، $b + c > a$. اکنون a را به هر دو طرف این نابرابری اضافه می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم $a + b + c > 2a$؛ این نابرابری معادل همان چیزی است که می‌خواهیم.

۴. پاسخ: ۳۵۰ کیلومتر.

۶. ثابت می‌کنیم $OB + OC + OD > OA$. طرفین نابرابریهای مثلث $AC + OC > OA$ و $OB + OD > BD$ را با هم جمع می‌کنیم و به‌دست می‌آوریم

$$AC + OB + OC + OD > OA + BD$$

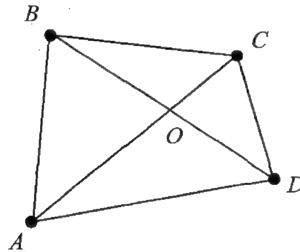
(شکل ۱۴۱ را ببینید). چون $AC = BD$، از نابرابری آخری نتیجهٔ موردنظر به‌دست می‌آید. توجه کنید که همین اثبات حتی وقتی که نقطهٔ O بیرون صفحهٔ مربع $ABCD$ هم باشد درست است.



شکل ۱۴۱

۷. فرض کنید قطرهای چهارضلعی یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند (شکل ۱۴۲). در این صورت

$$AB+BC>AC, BC+CD>BD, CD+DA>AC, DA+AB>BD$$



شکل ۱۴۲

از جمع کردن این نابرابریها به‌دست می‌آید

$$۲(AB+BC+CD+DA) > ۲(AC+BD)$$

و بنابراین نخستین حکممان ثابت می‌شود. علاوه بر این، در چهارضلعی موردنظر،

$$OA+OB>AB, OB+OC>BC, OC+OD>CD, OD+OA>DA$$

از جمع کردن این نابرابریها هم نتیجه می‌شود

$$۲(OA+OB+OC+OD) = ۲(AC+BD) > AB+BC+CD+DA$$

و به این ترتیب دومین حکم مسأله هم ثابت می‌شود.

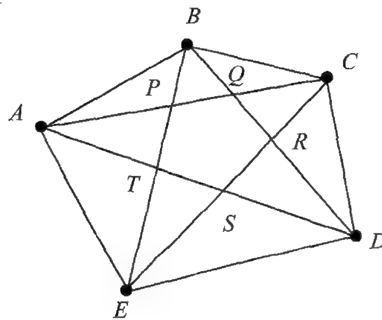
۸. می‌توان نوشت

$$AP+PB>AB, BQ+QC>BC, CR+RD>CD$$

$$DS+SE>DE, ET+TA>EA$$

(شکل ۱۴۳ را ببینید). از جمع کردن این نابرابریها به‌دست می‌آید

$$AP+PB+BQ+QC+CR+RD+DS+SE+ET+TA$$
$$>AB+BC+CD+DE+EA$$



شکل ۱۴۳

طرف راست این نابرابری محیط پنج‌ضلعی است در حالی که طرف چپش از مجموع قطرها کمتر است (طرف چپ نابرابری وقتی برابر با مجموع قطرها می‌شود که محیط پنج‌ضلعی درونی $PQRST$ را هم به آن اضافه کنیم). به این ترتیب نخستین حکممان ثابت می‌شود.

برای اثبات حکم دوم، نابرابریهای

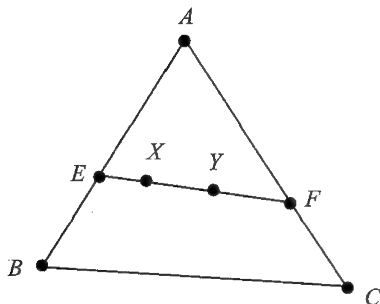
$$AC<AB+BC, BD<BC+CD, CE<CD+DE$$

$$DA<DE+EA, EB<EA+AB$$

را با هم جمع کنید.

۹. اگر نقطه‌های درونی موردنظر X و Y باشد، پاره‌خطی که آنها را به هم وصل می‌کند از هر دو طرف امتداد می‌دهیم تا ضلعهای مثلث را قطع کند (شکل ۱۴۴ را ببینید). در این صورت

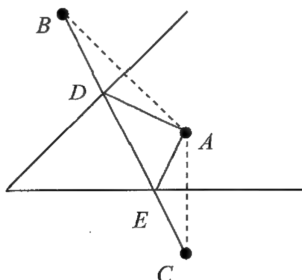
$$EF<EA+AF, \quad EF<EB+BC+CF$$



شکل ۱۴۴

از جمع کردن این نابرابریها نتیجه می‌شود که EF از نصف محیط مثلث کمتر است. چون $XY < EF$، XY هم از نصف محیط مثلث کمتر است.

۱۱. جواب مسأله مسیر $ADEA$ در شکل ۱۴۵ است. در حقیقت، هر مسیر دیگر متناظر با مسیری میان نقطه‌های B و C (در این نمودار) است که خطی راست نیست.



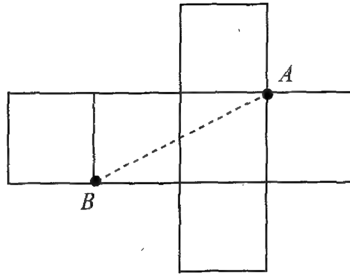
شکل ۱۴۵

۱۲. اگر AD و AE را رسم کنیم (شکل ۱۴۵)، آن‌وقت

$$BC = BD + DE + EC = AD + DE + EA$$

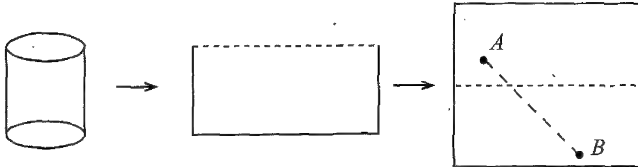
در این صورت DE از نصف محیط مثلث ADE کمتر است (بنابر مسألهٔ ۳). بنابراین DE از نصف BC هم کمتر خواهد بود.

۱۴. فرض کنید بتوانیم مکعب را طوری باز کنیم که نموداری مانند شکل ۱۴۶ به‌دست آید. در این صورت اگر مگس در نقطهٔ A باشد، کوتاهترین فاصلهٔ A تا رأس روبه‌رویی‌اش، B، خطی راست است. اکنون اگر مکعب را آن‌طور که قبلاً بود ببندیم پاسخ مسأله به‌دست می‌آید. دانش‌آموزان می‌توانند مدلی کاغذی برای این مسأله درست کنند. می‌توان مقداری عددی به یالها نسبت داد و از آنها خواست که طول کوتاهترین مسیر را پیدا کنند.



شکل ۱۴۶

۱۵. فرض کنید بتوانیم سطح لیوان را طوری «باز کنیم» که مستطیل میانی شکل ۱۴۷ به‌دست آید و بعد جلو و عقب این مستطیل را هم طوری «بازکنیم» که مستطیل آخری آن شکل به‌دست آید. در اینجا هم کوتاهترین مسیر باز با خطی راست مشخص می‌شود.



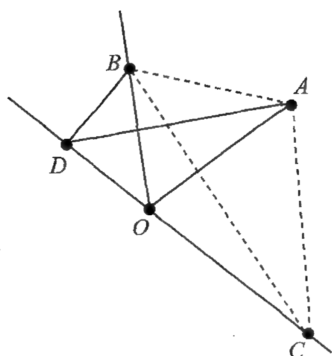
شکل ۱۴۷

۱۶. پاره‌خط AO را امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اکنون نابرابریهای مثلث $AB + BD > AD$ و $OD + DC > OC$ را با هم جمع می‌کنیم و از طرفین نابرابری حاصل OD را کم می‌کنیم.

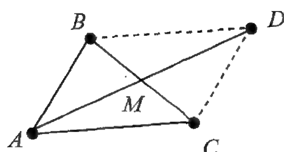
۱۸. جنگلبانی باید به رأس این زاویه برود و بعد به خانه‌اش بازگردد. اگر کلبه‌اش در نقطهٔ A و زاویهٔ منفرجهٔ موردنظر BOC باشد (شکل ۱۴۸ را ببینید)، یکی از زاویه‌های AOC یا AOB را که حاده است انتخاب می‌کنیم (ممکن است هر دو حاده باشند)؛ مثلاً فرض کنید زاویهٔ AOC حاده باشد. در این صورت از نقطهٔ B بر خط OC عمود BD را رسم می‌کنیم. بنابر حکم مسألهٔ ۱۳، $AB + BC + CA > 2AD$ و روشن است که $AD > AO$؛ بنابر این اثبات کامل می‌شود.

۱۹. از مثلث ABC متوازی‌الاضلاع $ABDC$ را بسازید (شکل ۱۴۹). اکنون بنابر نابرابری مثلث، $AB + BD > AD = 2AM$. چون $BD = AC$، نخستین حکممان ثابت می‌شود. بعد اگر نابرابریهای متناظر را در مورد هر یک از میانه‌ها بنویسیم و آنها را با هم جمع کنیم، دومین حکم مسأله هم ثابت می‌شود.

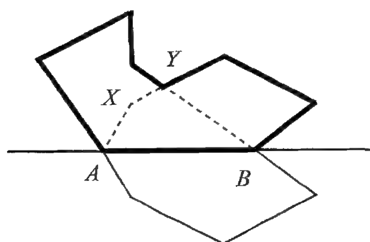
۲۰. هنگام محاسبهٔ محیط چندضلعی تاشده آن بخش از محیط چندضلعی اولیه را که با نقطه‌چین $AXYB$ (در مثال شکل ۱۵۰) نشان داده شده است از دست می‌دهیم، اما طول پاره‌خط AB



شکل ۱۴۸



شکل ۱۴۹



شکل ۱۵۰

را اضافه می‌کنیم. چون مجموع طولهای همهٔ ضلعهای هر چندضلعی، بجز یکی از آنها، از طول ضلع موردنظر بزرگتر است، پس با تا کردن چندضلعی محیط کاهش می‌یابد.

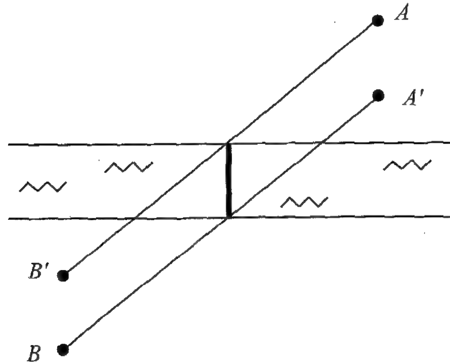
۲۱. دو تا از این ضلعها را درنظر بگیرید که هیچ رأس مشترکی نداشته باشند؛ مثلاً ضلعهای AB و CD. در این صورت، از یک طرف، $AC + BD < AB + CD$ (چون AC و BD قطرند). از طرف دیگر، اگر AC و BD یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند، آن‌وقت $OA + OB > AB$ و $OC + OD > CD$. اکنون از جمع کردن این نابرابریها به‌دست می‌آوریم $AB + CD < AC + BD$، که تناقض است.

۲۲. فرض کنید میانه‌های مثلث یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. در این صورت از جمع کردن نابرابریهای

$$AM + BM > AB, BM + CM > BC, CM + AM > AC$$

و توجه به اینکه طول هر یک از پاره‌خطهای AM، BM و CM، $\frac{2}{3}$ طول یک میانه است، نابرابری موردنظرمان به‌دست می‌آید.

۲۳. اگر عرض رودخانهٔ موردنظر h باشد و دو روستا در نقطه‌های A و B قرار داشته باشند، آن‌وقت دو سر پل باید در نقطه‌های برخورد خطهای $A'B$ و AB' با کرانه‌های رودخانه گذاشته شوند، که در اینجا نقطه‌های A' و B' از انتقال نقطه‌های A و B به‌اندازهٔ h به‌طرف رودخانه به‌دست می‌آیند (شکل ۱۵۱).



شکل ۱۵۱

۲۴. بزرگترین قطر این پنج‌ضلعی، مثلاً XY، را درنظر بگیرید. دو تا از رأسهای پنج‌ضلعی در یک طرف این قطر قرار دارند و بنابراین دو قطر متقاطع وجود دارند که یک سر هر یک از آنها به‌ترتیب نقطه‌های X و Yاند. اکنون به آسانی می‌توان دریافت که از برخورد این سه قطر یک مثلث تشکیل می‌شود.

۷. بازیها

۲. بعد از هر حرکت تعداد کپه‌ها یکی زیاد می‌شود. در ابتدا سه کپه داریم و در پایان بازی ۴۵تا. بنابراین روی هم ۴۲ حرکت انجام می‌شود. در نتیجه حرکت آخر را که به برد منجر می‌شود همیشه بازیکن دوم انجام می‌دهد.

۳. زوجیت عدد حاصل فقط به تعداد عددهای صحیح فرد مجموعهٔ عددهای داده شده بستگی دارد نه به موقعیت علامتهای بعلاوه و منها. چون در ابتدا ۱۰ عدد صحیح فرد وجود دارد و ۱۰ عددی زوج است، بازیکن اول بازی را می‌برد.

۴. بعد از هر حرکت تعداد سطرها و همین‌طور تعداد ستونهایی که می‌توان در آنها یک رخ گذاشت یکی کم می‌شود. بنابراین روی هم فقط ۸ حرکت ممکن وجود دارد و در نتیجه بازیکن دوم حرکت آخر (حرکت منجر به برد) را انجام می‌دهد.

۵. زوجیت تعداد ۱ های روی تخته‌سیاه بعد از هر حرکت بدون تغییر می‌ماند. چون در ابتدا تعداد ۱ها عددی زوج است، ممکن نیست که در پایان بازی فقط یک رقم ۱ بماند (زیرا ۱ عددی فرد

است!). بنابراین بازیکن دوم برنده می‌شود.

۶. وقتی این بازی را انجام می‌دهیم بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد اولیه دیر یا زود در مرحله‌ای نوشته می‌شود (این بازی را با الگوریتم اقلیدسی مقایسه کنید). بنابراین هر مضرب آن هم که از عددهای اولیه بزرگتر نباشد در اینجا می‌آید. در این مورد، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک عددهای اولیه ۱ است و در نتیجه هر یک از عددهای از ۱ تا ۳۶ باید در اینجا نوشته شود. بنابراین ۳۴ حرکت وجود دارد و از این رو بازیکن دوم برنده می‌شود.

۷. این بازی کمی جدیتر است، زیرا، در حقیقت، بازیکنی که به نظر می‌رسد دارد برنده می‌شود ممکن است اشتباهی مرتکب شود و برتری‌اش را از دست بدهد. این اشتباه این است که حرکتهایش طوری باشند که خانه‌های خط‌نخوردهٔ باقی‌مانده همگی یا در یک ستون باشند یا در یک سطر و به این ترتیب حریف بتواند در حرکت بعدی برنده شود. معلوم است که بازندهٔ این بازی بازیکنی است که دقیقاً این حرکت باخت‌آور را انجام دهد. توجه کنید که بعد از خط زدن یک سطر از صفحه‌ای $m \times n$ می‌توانیم خانه‌های باقی‌مانده را صفحه‌ای $n \times (m-1)$ درنظر بگیریم. به همین ترتیب، می‌توانیم با خط زدن یک ستون از صفحه‌ای $m \times n$ صفحه‌ای $m \times (n-1)$ تشکیل دهیم. تنها وضعیتی که در آن هر حرکتی «باخت‌آور» است، صفحهٔ ۲ × ۲ است. بنابراین بازیکنی که با حرکتش این موقعیت را برای حریفش به‌وجود بیاورد برنده می‌شود. به هر حال، همان‌طور که دیدیم، بعد از هر حرکت مجموع تعداد سطرها و ستونها یکی کم می‌شود. بنابراین برنده از روی زوجیت این مجموع در ابتدای بازی مشخص می‌شود. در قسمت (الف) برنده بازیکن اول است، در حالی که در قسمتهای (ب) و (ج) برنده دومی است. توجه کنید که در قسمت (ب) بازیکن دوم می‌تواند استراتژی تقارن را دنبال کند (بخش ۲ را ببینید).

۱۱. چون اسب همیشه از خانه‌ای سیاه به خانه‌ای سفید می‌رود یا برعکس، بازیکن دوم می‌تواند با استفاده از تقارن نسبت به نقطه یا خط بازی را ببرد.

۱۲. اگر بازیکن اول در نخستین حرکتش شاه را در خانهٔ مرکزی صفحه قرار دهد و بعد یک استراتژی تقارن را پیش گیرد برنده می‌شود.

۱۳. بازیکن دوم در هر دو قسمت مسأله استراتژی برد دارد، منتها در قسمت (الف) با استفاده از تقارن نسبت به خط و در قسمت (ب) با استفاده از تقارن نسبت به نقطه. اثبات در مورد اولی واقعاً ساده است: بازیکن دوم فقط کافی است تقارن میان حرکتهای خودش و حریف را حفظ کند، این‌طور که در هر حرکت به خانه‌ای برود که قرینهٔ مقصد حرکت قبلی بازیکن اول نسبت به خط میان سطرهای چهارم و پنجم صفحه است. چون هر دو خانه‌ای که نسبت به این خط قرینهٔ هم‌اند همیشه رنگهایشان با هم فرق می‌کند، ممکن نیست این وضعیت پیش بیاید که حرکت اخیر بازیکن اول مانع حرکت متقارن بازیکن دوم شود.

راه‌حل دومی دشوارتر است گرچه ایده‌اش عین همان است: بازیکن دوم در اینجا باید از تقارن

نسبت به مرکز صفحه استفاده کند. تکمیل جزئیات راه‌حل را برعهده خواننده می‌گذاریم.

۱۴. بازیکن دوم با استفاده از استراتژی تقارن نسبت به نقطه برنده می‌شود.

۱۵. اگر بازیکن اول ابتدا مهرهٔ مرکزی را بردارد و بعد استراتژی تقارن نسبت به نقطه را دنبال کند برنده می‌شود.

۱۶. اگر با نخستین حرکت بازیکن اول تعداد خرده‌سنگهای دو کپه برابر شوند و بعد او استراتژی بازیکن دوم در مسألهٔ ۱۰ را پیش بگیرد برنده می‌شود.

۱۷. بازیکن اول استراتژی برد دارد. ابتدا باید وتری رسم کند تا نقطه‌های موردنظر به دو گروه ۹تایی تقسیم شوند. بعد باید در برابر هر حرکت حریفش حرکتی کاملاً متقارن با آن انجام دهد. توجه کنید که این استراتژی به اینکه نقطه‌ها چطور دور دایره چیده شده باشند بستگی ندارد.

۱۸. در هر دو قسمت مسأله بازیکن دوم استراتژی برد دارد. بازیکن اول هر طور که بازی را آغاز کند، در برابر حرکتش بازیکن دوم می‌تواند طوری بازی کند که دو ردیف عین هم از گلبرگها روی گل باقی بمانند. بعد می‌تواند استراتژی تقارن را دنبال کند.

۱۹. در قسمتهای (الف) و (ب) مسأله، بازیکن دوم با دنبال کردن یک استراتژی تقارن نسبت به نقطه استراتژی برد دارد.

در قسمت (ج) بازیکن اول استراتژی برد دارد. در نخستین حرکتش آن ردیف را که از مکعبهای مرکزی چهار لایهٔ ۳ × ۳ تشکیل شده است سوراخ می‌کند. بعد از این کار به طور متقارن نسبت به نقطهٔ مرکز شکل بازی می‌کند.

۲۰. بازنده بازیکنی است که مستطیلی (و نه مربعی) به‌عرض ۱ جدا کند. بازیکن اول استراتژی برد دارد، به این ترتیب که ابتدا شکلات موردنظر را به دو تکهٔ ۵ × ۵ می‌شکند. بعد از این کار به‌طور متقارن بازی می‌کند.

۲۱. اگر بازیکن اول در نخستین حرکتش x را در خانهٔ مرکزی صفحه بگذارد و بعد در برابر هر یک از حرکتهای بازیکن دوم یک x را به‌طور متقارن نسبت به همان خانه قرار دهد می‌برد.

۲۳. بازیکن اول استراتژی برد دارد. سطرها و ستونهای صفحهٔ شطرنج را به ترتیب معمول شماره‌گذاری می‌کنیم، یعنی طوری که مختصات خانهٔ $a1$، (۱, ۱) باشد و مختصات خانهٔ $h8$، (۸, ۸). اکنون موقعیتهای برد موقعیتهایی‌اند که در آنها شاه در خانه‌ای می‌نشیند که هر دو مختصش عددهایی زوج‌اند. در نخستین حرکت هم شاه به خانهٔ $b2$ می‌رود.

۲۴. بازیکن اول استراتژی برد دارد. در اینجا موقعیتهای برد موقعیتهایی‌اند که در آنها تعداد آب‌نباتهای هر دو دسته عددهایی فرد باشند. بازیکن اول در نخستین حرکتش باید دستهٔ ۲۱ عددی آب‌نبات را بخورد و دستهٔ ۲۰ عددی را به دو دستهٔ دلخواه، هر یک شامل تعدادی فرد آب‌نبات، تقسیم کند.

۲۵. بازیکن دوم استراتژی برد دارد. در اینجا موقعیتهای برد موقعیتهایی‌اند که در آنها تعداد خانه‌های خالی میان این مهره‌ها بر ۳ بخش‌پذیر است.

۲۶. بازیکن اول استراتژی برد دارد. در اینجا موقعیتهای برد موقعیتهایی‌اند که در آنها قوطی شامل $2^n - 1$ چوب کبریت است. در نخستین حرکت باید ۲۵۵ چوب کبریت در قوطی باقی گذاشته شود.

۲۷. بازیکن اول استراتژی برد دارد. در اینجا موقعیتهای برد موقعیتهایی‌اند که در آنها بزرگترین دسته شامل $2^n - 1$ خرده‌سنگ است. در نخستین حرکت باید دو کپهٔ اول را به‌طور دلخواه تقسیم کرد و کپهٔ سوم را به ترتیب به دو کپهٔ ۶۳تایی و ۷تایی.

۲۸. در این بازی بازیکنی که یک عدد ۱ به‌دست بیاورد برنده می‌شود. بنابراین برنده بازیکن اول است به‌شرطی‌که دریابد که نوشتن عددهای فرد موقعیتهای برد را به‌دست می‌دهد.

۲۹. در قسمت (الف) مسأله، بازیکن دوم استراتژی برد دارد و در قسمت (ب)، اولی. در اینجا موقعیتهای برد موقعیتهایی‌اند که در آنها هر یک از دسته‌ها شامل تعدادی فرد چوب‌کبریت است.

در مورد مسأله‌های ۳۲ تا ۳۸، پاسخهایشان را می‌آوریم که از روش تحلیل از آخر به‌دست آمده‌اند. خواننده می‌تواند خودش جزئیات راه‌حل را به‌دست بیاورد.

۳۲. بازیکن دوم استراتژی برد دارد. در شکل ۱۵۲ آرایش علامتهای بعلاوه و منها را نشان داده‌ایم.

-	-	+	+	-	-	+	+
-	-	+	+	-	-	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	+	+	-	-	+	+
-	-	+	+	-	-	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-
+	-	-	-	-	-	-	-

شکل ۱۵۲

۳۳. هر دو قسمت (الف) و (ب) مسأله را می‌توانیم با استفاده از صفحهٔ شطرنج صورتبندی کنیم. در این صورت معلوم می‌شود که بازی قسمت (الف) عین بازی مسألهٔ ۳۲ است. آرایشهای علامتهای بعلاوه و منها در هر دو قسمت مسأله عین هم‌اند و در شکل مسألهٔ ۳۲ (شکل ۱۵۲) نشان داده شده‌اند.

۳۴. بازیکن اول استراتژی برد دارد. آرایش علامتهای بعلاوه و منها را بعد از صورتبندی مسأله با استفاده از صفحهٔ شطرنج در شکل ۱۵۳ نشان داده‌ایم.

۳۵. این مسأله مثالی است از اینکه برای تحلیل بازیها از آخر آوردن تعبیری هندسی ضروری نیست. در اینجا مناسب است که هر عدد را با یک بعلاوه یا منها علامتگذاری کنیم. فقط مضربهای ۱۰ را با بعلاوه علامتگذاری می‌کنیم. بنابراین بازیکن دوم استراتژی برد دارد.

+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	+
+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	+
-	-	-	-	-	-	-	+	+	-	-	+
-	-	-	-	-	-	-	-	+	-	-	+
+	+	+	+	+	+	-	-	+	-	-	+
-	-	-	-	+	+	-	-	+	-	-	+
-	-	-	-	-	+	-	-	+	-	-	+
+	+	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+
-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+
-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+

شکل ۱۵۳

۳۶. موقعیتهای برد در اینجا عددهای از ۵۶ تا ۱۱۱ یا عددهای از ۴ تا ۶اند. بنابراین بازیکن اول آخرسر برنده می‌شود، به‌شرطی که در نخستین حرکتش یکی از عددهای ۴، ۵ یا ۶ را به‌دست بیاورد.

۳۷. موقعیتهای برد در اینجا عددهای ۵۰۰، ۲۵۰، ۱۲۵، ۶۲، ۳۱، ۱۵، ۷ و ۳اند. بازیکن اول استراتژی برد دارد.

۳۸. موقعیتهای برد در اینجا مضربهای ۳اند. بازیکن اول آخر سر برنده می‌شود، مثلاً این‌طور که در نخستین حرکتش یکی از عددهای ۱، ۴، یا ۱۶ را از عدد ۱۰۰۰ کم کند.

۹. استقرا

۸. پایهٔ استقرا را می‌توان یا $n = ۱$ اختیار کرد یا $n = ۲$. برای اثبات گام استقرایی $k + ۱$ نقطه روی دایره درنظر می‌گیریم. پاره‌خطهایی که همهٔ این نقطه‌ها بجز نقطهٔ $(k + ۱)$ام را به هم وصل می‌کنند درون دایره را بنابر فرض استقرا به

$$\frac{k(k-۱)(k-۲)(k-۳)}{۲۴} + \frac{k(k-۱)}{۲} + ۱$$

ناحیه تقسیم می‌کنند. پاره‌خطی که نقطهٔ $(k + ۱)$ام را به نقطهٔ iام (i عددی طبیعی است که $i \leqslant k$) وصل می‌کند $(i - ۱)(k - i)$ پاره‌خط دیگر را قطع می‌کند. بنابراین، با افزودن این پاره‌خط، تعداد ناحیه‌ها به‌اندازهٔ $(i - ۱)(k - i) + ۱$ زیاد می‌شود. با ترسیم همهٔ پاره‌خطهایی که نقطهٔ $(k + ۱)$ام را به k نقطهٔ دیگر وصل می‌کنند تعداد ناحیه‌ها به‌اندازهٔ

$$۱ + (۱ \times (k-۲) + ۱) + \cdots + ((i-۱)(k-i) + ۱)$$
$$+ \cdots + ((k-۲) \times ۱ + ۱) + ۱$$

زیاد می‌شود. اما عبارت آخر را می‌توان این‌طور نوشت

$$(k+۱)(۱+۲+\cdots+k)-(۱^۲+۲^۲+\cdots+k^۲)-k^۲+k$$

با استفاده از اتحادهای

$$۱+۲+\cdots+k=\frac{k(k+۱)}{۲}$$

(راه‌حل مسألهٔ ۶ را ببینید) و

$$۱^۲+۲^۲+\cdots+k^۲=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}$$

(مسألهٔ ۱۰ را ببینید)، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}&۱+(۱\times(k-۲)+۱)+\cdots+((i-۱)(k-i)+۱)\\&\quad+\cdots+((k-۲)\times ۱+۱)+۱\\&=\frac{k(k+۱)^۲}{۲}-\frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}-k^۲+k\end{aligned}$$

فقط می‌ماند ثابت کنیم که

$$\begin{aligned}&\left(\frac{k(k-۱)(k-۲)(k-۳)}{۲۴}+\frac{k(k-۱)}{۲}+۱\right)\\&\quad+\left(\frac{k(k+۱)^۲}{۲}-\frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}-k^۲+k\right)\\&=\frac{(k+۱)k(k-۱)(k-۲)}{۲۴}+\frac{k(k+۱)}{۲}+۱\end{aligned}$$

که این هم محاسبه‌ای جبری بیش نیست.

۹. پایهٔ استقرا عبارت است از $n=۱$. گام استقرایی را ثابت می‌کنیم. بنابر فرض استقرا،

$$۱+۳+\cdots+(۲k-۱)=k^۲$$

بنابراین

$$\begin{aligned}&۱+۳+\cdots+(۲k-۱)+(۲(k+۱)-۱)\\&=k^۲+(۲(k+۱)-۱)=(k+۱)^۲\end{aligned}$$

۱۰. پایهٔ استقرا عبارت است از $n = 1$. گام استقرایی را ثابت می‌کنیم. بنابر فرض استقرا،

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6} \end{aligned}$$

۱۱. پایهٔ استقرا عبارت است از $n = 2$ و درستی آن واضح است. بنابر فرض استقرا،

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + (k-1) \times k = \frac{(k-1)k(k+1)}{3}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + (k-1) \times k + k \times (k+1) \\ &= \frac{(k-1)k(k+1)}{3} + k \times (k+1) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} \end{aligned}$$

۱۲. پایهٔ استقرا عبارت است از $n = 2$. بنابر فرض استقرا

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k} = \frac{k-1}{k}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(k-1)k} + \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \frac{k-1}{k} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

۱۳. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. پایهٔ استقرا عبارت است از $n = 1$. گام استقرایی را ثابت می‌کنیم. بنابر فرض استقرا،

$$1 + x^2 + \cdots + x^k = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1}$$

بنابراین

$$1 + x^2 + \cdots + x^k + x^{k+1} = \frac{x^{k+1} - 1}{x - 1} + x^{k+1} = \frac{x^{k+2} - 1}{x - 1}$$

۱۴. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. درستی پایهٔ استقرا ($n = ۱$) کاملاً واضح است. برای اثبات گام استقرایی، بنابر فرض استقرا می‌توان نوشت

$$\frac{۱}{a(a+b)} + \frac{۱}{(a+b)(a+۲b)} + \cdots + \frac{۱}{(a+(k-۱)b)(a+kb)} = \frac{k}{a(a+kb)}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{۱}{a(a+b)} + \frac{۱}{(a+b)(a+۲b)} + \cdots &+ \frac{۱}{(a+(k-۱)b)(a+kb)} \\ &+ \frac{۱}{(a+kb)(a+(k+۱)b)} \\ &= \frac{k}{a(a+kb)} + \frac{۱}{(a+kb)(a+(k+۱)b)} \\ &= \frac{k+۱}{a(a+(k+۱)b)}\end{aligned}$$

۱۵. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۰$:

$$\frac{m!}{۰!} = \frac{(m+۱)!}{۰!(m+۱)}$$

برای اثبات گام استقرایی (بنابر فرض استقرا) می‌توان نوشت

$$\frac{m!}{۰!} + \frac{(m+۱)!}{۱!} + \cdots + \frac{(m+k)!}{k!} = \frac{(m+k+۱)!}{k!(m+۱)}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{m!}{۰!} + \frac{(m+۱)!}{۱!} + \cdots + \frac{(m+k)!}{k!} &+ \frac{(m+k+۱)!}{(k+۱)!} \\ &= \frac{(m+k+۱)!}{k!(m+۱)!} + \frac{(m+k+۱)!}{(k+۱)!} \\ &= \frac{(m+k+۱)!}{k!}\left(\frac{۱}{m+۱} + \frac{۱}{k+۱}\right) \\ &= \frac{(m+k+۲)!}{(k+۱)!(m+۱)}\end{aligned}$$

۱۶. پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۲$. بنابر فرض استقرا،

$$\left(۱ - \frac{۱}{۴}\right)\left(۱ - \frac{۱}{۹}\right)\cdots\left(۱ - \frac{۱}{k^{۲}}\right) = \frac{k+۱}{۲k}$$

بنابراین

$$\left(۱-\frac{۱}{۴}\right)\left(۱-\frac{۱}{۹}\right)\cdots\left(۱-\frac{۱}{k^۲}\right)\left(۱-\frac{۱}{(k+۱)^۲}\right)$$
$$=\frac{k+۱}{۲k}\left(۱-\frac{۱}{(k+۱)^۲}\right)=\frac{k+۲}{۲(k+۱)}$$

۱۷. پایهٔ استقرا عبارت است از $n=۱$: در این حالت $۳۶=۳^۳+۲^۳+۱^۳$ و ۳۶ بر ۹ بخش‌پذیر است.

اکنون گام استقرایی را ثابت می‌کنیم. بنابر فرض استقرا، $k^۳+(k+۱)^۳+(k+۲)^۳$ بر ۹ بخش‌پذیر است. از طرف دیگر، می‌توان نوشت

$$(k+۱)^۳+(k+۲)^۳+(k+۳)^۳=(k^۳+(k+۱)^۳+(k+۲)^۳)+(k+۳)^۳-k^۳$$
$$=(k^۳+(k+۱)^۳+(k+۲)^۳)+۹(k^۲+۳k+۳)$$

بنابراین $(k+۱)^۳+(k+۲)^۳+(k+۳)^۳$ هم بر ۹ بخش‌پذیر است.

۱۸. پایهٔ استقرا عبارت است از $n=۱$: در این حالت، $۸۰=۹-۸+۳^۴$ و ۸۰ بر ۱۶ بخش‌پذیر است.

اکنون گام استقرایی را ثابت می‌کنیم. بنابر فرض استقرا، $۳^{۲k+۲}+۸k-۹$ بر ۱۶ بخش‌پذیر است. می‌توان نوشت

$$(۳^{۲k+۴}+۸(k+۱)-۹)-(۳^{۲k+۲}+۸k-۹)=۳^{۲k+۲}\times ۸+۸=۸(۳^{۲k+۲}+۱)$$

عدد $۳^{۲k+۲}+۱$ زوج است، بنابراین $۸(۳^{۲k+۲}+۱)$ (و در نتیجه، $۳^{۲k+۴}+۸(k+۱)-۹$) بر ۱۶ بخش‌پذیر است.

۱۹. پایهٔ استقرا عبارت است از $n=۱$: در این حالت $۱۸=۴^۱+۱۵-۱$.

اکنون گام استقرایی را ثابت می‌کنیم. می‌دانیم که $۴^k+۱۵k-۱$ بر ۹ بخش‌پذیر است. می‌توان نوشت

$$(۴^{k+۱}+۱۵(k+۱)-۱)-(۴^k+۱۵k-۱)=۴^k\times ۳+۱۵=۳(۴^k+۵)$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد ۴^k بر ۳، ۱ می‌شود. بنابراین $۴^k+۵$ بر ۳، و در نتیجه، $۳(۴^k+۵)$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

۲۰. پایهٔ استقرا عبارت است از $n=۱$: در این حالت $۱۳۳\times ۲۳=۱۱^۳+۱۲^۳$.

در ضمن، بنابر فرض استقرا، می‌دانیم که $۱۱^{k+۲}+۱۲^{۲k+۱}$ بر ۱۳۳ بخش‌پذیر است. می‌توان نوشت

$$۱۱^{k+۳}+۱۲^{۲k+۳}=۱۱(۱۱^{k+۲}+۱۲^{۲k+۱})+۱۳۳\times ۱۲^{۲k+۱}$$

بنابراین $۱۱^{k+۳} + ۱۲^{۲k+۳}$ بر ۱۳۳ بخش‌پذیر است.

۲۱. پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۱$: در این حالت واضح است که $۲^۳ + ۱$ بر $۳^۲$ بخش‌پذیر است.

از فرض استقرا می‌دانیم که $۲^{۳^k} + ۱$ بر $۳^{k+۱}$ بخش‌پذیر است. علاوه بر این،

$$۲^{۳^{k+۱}} + ۱ = \left(۲^{۳^k}\right)^۳ + ۱ = (۲^{۳^k} + ۱)((۲^{۳^k})^۲ - ۲^{۳^k} + ۱)$$

بنابراین فقط می‌ماند ثابت کنیم که $(۲^{۳^k})^۲ - ۲^{۳^k} + ۱$ بر ۳ بخش‌پذیر است. باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $۲^{۳^k}$ بر ۳ برابر با ۲ است. در نتیجه، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $\left(۲^{۳^k}\right)^۲ - ۲^{۳^k} + ۱$ بر ۳ صفر می‌شود.

۲۲. پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۰$ و $n = ۱$ و درستی حکم مسأله در این حالتها واضح است. برای اثبات گام استقرایی از n به $n + ۱$ باید ثابت کنیم که $ab^{n+۱} + c(n+۱) + d$ بر m بخش‌پذیر است. از این نکته استفاده می‌کنیم که جملهٔ قبلی دنبالهٔ $ab^n + cn + d$ بر m بخش‌پذیر است و این جمله را در b ضرب می‌کنیم. در این صورت به‌دست می‌آوریم که $ab^{n+۱} + cbn + bd$ بر m بخش‌پذیر است و از این‌رو فقط می‌ماند ثابت کنیم که $c(n + ۱ - bn) + d(۱ - b)$ هم بر m بخش‌پذیر است. با افزودن جملهٔ $cn(۱ - b)$، که بر m بخش‌پذیر است، به این عبارت، نتیجه می‌شود که $c + d(۱ - b)$ هم بر m بخش‌پذیر است، زیرا می‌توان آن‌را به شکل $(ab - a + c) - (a + d)(b - ۱)$ نوشت. به‌این ترتیب اثبات گام استقرایی کامل می‌شود.

۲۳. پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۱$: در این حالت نابرابری $۲^۱ > ۱$ به‌وضوح درست است.

اکنون نوبت اثبات گام استقرایی است. بنابر فرض استقرا، $۲^k > k$. بنابراین

$$۲^{k+۱} = ۲ \times ۲^k > ۲k \geqslant k + ۱$$

۲۴. الف) پاسخ: $n \geqslant ۳$.

اگر $n = ۱, ۲$، آن‌وقت $۲^n < ۲n + ۱$. به‌استقرا روی n ثابت می‌کنیم که اگر $n \geqslant ۳$، آن‌وقت $۲^n > ۲n + ۱$.

پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۳$: در این حالت، $۲^۳ > ۲ \times ۳ + ۱$. اثبات گام استقرایی را از فرض $۲^k > ۲k + ۱$ آغاز می‌کنیم. در این صورت

$$۲^{k+۱} = ۲ \times ۲^k > ۴k + ۲ > ۲(k + ۱) + ۱$$

ب) پاسخ: $n = ۱$ و $n \geqslant ۵$.

اگر $n = ۱$، $۲^۱ > ۱^۲$ و اگر n عددهای ۲، ۳ یا ۴ باشد، $۲^n \leqslant n^۲$. به استقرا روی n ثابت می‌کنیم که اگر $n \geqslant ۵$، آن‌وقت $۲^n > n^۲$.

پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۵$: در این حالت، $۵^۲ < ۲^۵$. اکنون گام استقرایی را ثابت می‌کنیم. می‌دانیم که $۲^k > k^۲$. بنابراین

$$۲^{k+۱} = ۲^k + ۲^k > k^۲ + ۲k + ۱ = (k+۱)^۲$$

(در اینجا از نابرابری $۲^k > ۲k + ۱$ استفاده کرده‌ایم که در مسألهٔ ۲۴(الف) ثابت شد).

۲۵. پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۲$: در این حالت $\frac{۱۳}{۲۴} < \frac{۷}{۱۲} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۳}$. علاوه بر این، بنابر فرض استقرا،

$$\frac{۱}{k+۱} + \frac{۱}{k+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲k} > \frac{۱۳}{۲۴}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&\frac{۱}{k+۲} + \frac{۱}{k+۳} + \cdots + \frac{۱}{۲k} + \frac{۱}{۲k+۱} + \frac{۱}{۲k+۲} \\
&\quad = \left(\frac{۱}{k+۱} + \frac{۱}{k+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲k}\right) + \frac{۱}{۲k+۱} + \frac{۱}{۲k+۲} - \frac{۱}{k+۱} \\
&\quad > \frac{۱}{k+۱} + \frac{۱}{k+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲k} > \frac{۱۳}{۲۴}
\end{aligned}$$

زیرا $\frac{۱}{k+۱} = \frac{۲}{۲k+۲} < \frac{۱}{۲k+۲} + \frac{۱}{۲k+۱}$.

۲۶. پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۲$ و $n = ۳$: در این حالتها $۴ > ۱ + ۲\sqrt{۲}$ و $۸ > ۱ + ۳ \times ۲$.
چون

$$۲^k > ۱ + k\sqrt{۲^{k-۱}}$$

به‌دست می‌آوریم

$$۲^{k+۱} > ۲ + ۲k\sqrt{۲^{k-۱}} > ۱ + \sqrt{۲} \times k\sqrt{۲^k}$$

اکنون فقط کافی است توجه کنیم که اگر $k \geqslant ۳$، آن‌وقت $\sqrt{۲} \times k > k + ۱$.

۲۷. باید ثابت کنیم که به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n و عددهای حقیقی دلخواه $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n،

$$|a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n| \leqslant |a_۱| + |a_۲| + \cdots + |a_n|$$

این حکم را با استفاده از استقرا روی n ثابت می‌کنیم.

پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۱$ و $n = ۲$. اگر $n = ۱$، درستی حکم واضح است. اگر $n = ۲$، حکم به‌شکل $|a_۱ + a_۲| \leqslant |a_۱| + |a_۲|$ درمی‌آید که می‌توان آن را با تحلیل حالت به

حالت ساده‌ای، یعنی بررسی هر چهار حالت ممکن علامتهای این عددها، ثابت کرد. اکنون، با استفاده از پایهٔ استقرا به‌دست می‌آید

$$|a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k + a_{k+۱}| \leqslant |a_۱ + a_۲ + \cdots + a_k| + |a_{k+۱}|$$

آخر سر از فرض استقرا نتیجه می‌شود

$$|a_۱ + a_۲ + \ldots + a_k| + |a_{k+۱}| \leqslant |a_۱| + |a_۲| + \ldots + |a_k| + |a_{k+۱}|$$

۲۸. از استقرا روی n استفاده می‌کنیم. پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۲$: در این حالت، اگر $x \neq ۰$،

$$(۱ + x)^۲ = ۱ + ۲x + x^۲ > ۱ + ۲x$$

اکنون بنابر فرض استقرا، $(۱ + x)^k > ۱ + kx$ و در نتیجه

$$(۱ + x)^{k+۱} > (۱ + x)(۱ + kx) = ۱ + (k + ۱)x + kx^۲ > ۱ + (k + ۱)x$$

(توجه کنید که $۱ + x > ۰$).

۲۹. پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۱$: در این حالت

$$\frac{۱}{۲} \leqslant \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

بنابر فرض استقرا،

$$\frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times (۲k - ۱)}{۲ \times ۴ \times ۶ \times \cdots \times ۲k} \leqslant \frac{۱}{\sqrt{۲k + ۱}}$$

بنابراین

$$\frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \cdots \times (۲k - ۱)}{۲ \times ۴ \times ۶ \times \cdots \times ۲k} \times \frac{۲k + ۱}{۲k + ۲} \leqslant \frac{۱}{\sqrt{۲k + ۱}} \times \frac{۲k + ۱}{۲k + ۲} = \frac{\sqrt{۲k + ۱}}{۲k + ۲}$$

فقط می‌ماند که نابرابری

$$\frac{\sqrt{۲k + ۱}}{۲k + ۲} \leqslant \frac{۱}{\sqrt{۲k + ۳}}$$

را ثابت کنیم. این نابرابری هم‌ارز نابرابری

$$(۲k + ۱)(۲k + ۳) \leqslant (۲k + ۲)^۲$$

است که درستی آن با بسط دادن دو طرفش ثابت می‌شود.

۳۳. در اینجا پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۱$ و $n = ۲$. اثبات گام استقرایی هم کاملاً آسان است:

$$a_{k+۱} = ۳a_k - ۲a_{k-۱} = ۳(۲^k + ۱) - ۲(۲^{k-۱} + ۱) = ۲^{k+۱} + ۱$$

۳۴. در حقیقت، $a_۳ = ۱$، $a_۴ = -۱$، $a_۵ = -۲$، $a_۶ = -۱$، $a_۷ = ۱$ و $a_۸ = ۲$. از این رو به‌ازای $n = ۱$ و $n = ۲$، $a_{n+۶} = a_n$. اکنون به «استقرای قوی» (بخش ۴ فصل «استقرا») را ببینید) حکم مسأله ثابت می‌شود.

۳۵. می‌توان حکم مسأله را در مورد عددهای طبیعی ۱ تا ۵ مستقیماً بررسی کرد. اکنون اگر عدد طبیعی x داده شده باشد، فرض کنید F_n بزرگترین عدد فیبوناتچی باشد که از x بزرگتر نیست. در این صورت، $F_{n-۱} > x - F_n \geqslant ۰$ (چون $F_{n-۱} + F_n = F_{n+۱} > x$) و بنابراین $x - F_n$ را می‌توان به‌شکل مجموع چند عدد فیبوناتچی متمایز و کوچکتر از $F_{n-۱}$ نوشت.

۳۶. حکم زیر را به‌استقرا روی n ثابت می‌کنیم:

به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n باقی‌مانده‌های تقسیم عددهای فیبوناتچی F_n و $F_{n+۸}$ بر ۳، با هم برابرند.

پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۱$ و $n = ۲$: در این حالتها، $F_۱ = ۱$، $F_۲ = ۱$، $F_۹ = ۳۴$، $F_{۱۰} = ۵۵$ و معلوم است که باقی‌مانده‌های تقسیم $F_۱$ و $F_۹$ (و $F_۲$ و $F_{۱۰}$) بر ۳ با هم برابرند.

اثبات گام استقرایی بسیار شبیه راه‌حل مسألهٔ ۳۴ است. بنابر فرض استقرا، باقی‌مانده‌های تقسیم $F_{k+۸}$ و F_k (و همین‌طور، $F_{k+۷}$ و $F_{k-۱}$) بر ۳ با هم برابرند. چون $F_{k+۹} = F_{k+۸} + F_{k+۷}$ و $F_{k+۱} = F_k + F_{k-۱}$ پس باقی‌مانده‌های تقسیم $F_{k+۹}$ و $F_{k+۱}$ هم بر ۳ برابرند.

فقط می‌ماند که باقی‌مانده‌های تقسیم نخستین هشت عدد فیبوناتچی بر ۳ را حساب کنیم. این باقی‌مانده‌ها عبارت‌اند از

$$۱, ۱, ۲, ۰, ۲, ۲, ۱, ۰$$

بنابراین nامین عدد فیبوناتچی وقتی و فقط وقتی بر ۳ بخش‌پذیر است که n بر ۴ بخش‌پذیر باشد.

۴۲. حکم موردنظر را به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. درستی حکم در مورد پایهٔ استقرا، $n = ۱$، واضح است.

برای اثبات گام استقرایی ابتدا ثابت می‌کنیم که با استفاده از چنین ماشین‌حسابی می‌توانیم عددی طبیعی و کوچکتر از n به‌دست آوریم. برای اثبات این ادعا، از میان n، m و ۰ دو عددی را انتخاب می‌کنیم که یا هر دو زوج باشند و یا هر دو فرد و میانگین حسابیشان، x، را حساب می‌کنیم. از دو عدد انتخاب شده دست‌کم یکی صفر نیست. به‌جای این عدد غیرصفر x می‌گذاریم و این عمل را در مورد سه عدد جدید تکرار می‌کنیم. این روند را آن‌قدر تکرار می‌کنیم تا اینکه از سه‌عدد مثبت حاصل یکی کوچکتر از n شود (دیر یا زود این وضعیت پیش می‌آید، زیرا بعد از هر عمل مجموع دو عدد مثبت در سه‌تایی حاصل کاهش می‌یابد).

اکنون فرض کنید l بزرگترین عدد طبیعی کوچکتر از n باشد که می‌توان آن‌را با استفاده از چنین ماشین‌حسابی به‌دست آورد. علاوه بر این، فرض کنید $l \neq n - ۱$. بنابر فرض همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا l را می‌توان با استفاده از چنین ماشین‌حسابی به‌دست آورد. اگر l و n هر دو زوج یا هر دو فرد باشند، می‌توانیم میانگین حسابی l و n، y، را حساب کنیم که این با تعریف l تناقض دارد، زیرا $l < y < n$. اگر از عددهای l و n یکی فرد و دیگری زوج باشد، می‌توانیم میانگین حسابی $l - ۱$ و n را حساب کنیم و باز به همان تناقض برسیم.

۴۳. راهنمایی: گام استقرایی از دستور

$$۳(۲^n + ۱) - ۲(۲^{n-۱} + ۱) = ۲^{n+۱} + ۱$$

که به‌ازای هر عدد صحیح مانند n درست است، نتیجه می‌شود.

۴۴. از استقرا روی m استفاده می‌کنیم. پایهٔ استقرا عبارت است از $m = ۱$: در این حالت باید ثابت کنیم $n \geqslant ۲^{n-۱}$. این نابرابری را می‌توان به استقرا روی n ثابت کرد.

اکنون بنابر فرض استقرا، $mn \geqslant ۲^{m+n-۲}$ و در نتیجه

$$۲^{(m+۱)+n-۲} \geqslant ۲mn \geqslant (m+۱)n$$

۴۵. راهنمایی: ابتدا ثابت کنید می‌توان هر مربع را به چند تکه طوری برید که با کنار هم چیدن آنها می‌شود مستطیلی درست کرد که طول یک ضلعش واحد باشد.

۴۶. گام استقرایی را می‌توان این‌طور ثابت کرد: $۲^{n+۱}$ عدد داده شده را به دو دسته، هر یک شامل ۲^n عدد، تقسیم کنید. در هر یک از این دو دسته می‌توانیم $۲^{n-۱}$ عدد بیابیم که مجموعشان بر $۲^{n-۱}$ بخش‌پذیر باشد. بعد، از میان ۲^n عدد باقی‌مانده می‌توانیم مجموعهٔ سومی هم شامل $۲^{n-۱}$ عدد پیدا کنیم که مجموع آنها هم بر $۲^{n-۱}$ بخش‌پذیر باشد. فرض کنید مجموع عددهای این سه دسته $۲^{n-۱}a$، $۲^{n-۱}b$ و $۲^{n-۱}c$ باشد. در میان عددهای a، b و c می‌توانیم دو عدد پیدا کنیم که یا هر دو زوج باشد یا هر دو فرد. اجتماع مجموعه‌های متناظر این دو عدد مجموعه‌ای شامل ۲^n عدد است که مجموعشان بر ۲^n بخش‌پذیر است.

۴۷. در مورد n دایره پاسخ مسأله $n(n - ۱) + ۲$ است. برای اثبات این حکم می‌توانیم از استقرا روی n استفاده کنیم. درستی پایهٔ استقرا ($n = ۱$) واضح است.

برای اثبات گام استقرایی موقتاً دایرهٔ $(k+۱)$ام را برمی‌داریم. بنابر فرض استقرا، k دایره صفحه را حداکثر به $k(k - ۱) + ۲$ ناحیه تقسیم می‌کنند. اکنون دایرهٔ برداشته شده را «سرجایش می‌گذاریم». این دایره هر یک از k دایرهٔ قبلی را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند و بنابراین تعداد ناحیه‌های صفحه حداکثر $۲k$ زیاد می‌شود. با به‌دست آوردن دستور

$$k(k - ۱) + ۲ + ۲k = k(k + ۱) + ۲$$

این بخش از اثبات کامل می‌شود.

می‌توان آرایشی از دایره‌ها را که صفحه را به این تعداد ناحیه تقسیم می‌کنند به استقرا به‌دست آورد. این آرایشها (به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n، یک آرایش) را طوری می‌سازیم که ویژگیهای زیر را داشته باشند:

الف) هیچ سه‌دایره‌ای از یک نقطه نگذرند؛

ب) اشتراک درونهای همهٔ این n دایره تهی نباشد؛

ج) n دایره‌مان صفحه را به $n(n-1)+2$ ناحیه تقسیم کنند.

باز هم درستی پایهٔ استقرا، یعنی حالتی که $n=1$، واضح است.

اثبات گام استقرایی را با آرایشی از k دایره (که فرض می‌شود وجود دارد) شروع می‌کنیم که صفحه را به $k(k-1)+2$ ناحیه تقسیم می‌کند. دایرهٔ دیگری را طوری اضافه می‌کنیم که از نقطه‌ای واقع در درون هر k دایرهٔ این آرایش بگذرد. این دایرهٔ $(k+1)$ام را می‌توانیم طوری انتخاب کنیم که از نقطه‌های برخورد دایره‌های دیگر نگذرد. این آرایش جدید شامل $k+1$ دایره است و همهٔ ویژگیهای موردنظر را دارد.

در مورد n مثلث پاسخ مسأله $3n(n-1)+2$ است. اثبات دقیقاً مانند اثبات بالاست، بجز اینکه دو مثلث یکدیگر را حداکثر در ۶ نقطه قطع می‌کنند.

برای ساختن آرایشی از n مثلث که صفحه را به $3n(n-1)+2$ ناحیه تقسیم کنند، می‌توان n مثلث متساوی‌الاضلاع برابر را طوری رسم کرد که مرکزشان یکی باشد و هیچ سه تایی از آنها در یک نقطه هم را قطع نکنند.

۴۸. از استقرا روی n، تعداد دایره‌ها، استفاده می‌کنیم. پایهٔ استقرا عبارت است از $n=1$.

برای اثبات گام استقرایی موقتاً دایرهٔ $(k+1)$ام و وترش را برمی‌داریم. بنابر فرض استقرا، ناحیه‌هایی از صفحه را که k دایره و وترهایشان به‌وجود آورده‌اند می‌توان با ۳ رنگ (مثلاً، قرمز، آبی و سبز) طوری رنگ کرد که شرط موردنظر برقرار باشد.

اکنون دایرهٔ برداشته شده و وترش را سرجایشان می‌گذاریم. وتر موردنظر درون این دایره را به دو ناحیه تقسیم می‌کند. رنگهای یک ناحیه را با استفاده از طرح: قرمز← آبی، آبی ← سبز، سبز← قرمز و رنگهای ناحیهٔ دیگر را با استفاده از طرح: قرمز← سبز، سبز← آبی، آبی ← قرمز عوض می‌کنیم. رنگهای ناحیه‌هایی که بیرون دایرهٔ $(k+1)$ام قرار دارند بی‌تغییر می‌مانند. در رنگ‌آمیزی حاصل، رنگهای هر دو ناحیهٔ مجاور از صفحه مختلف‌اند.

۴۹. از اصل استقرای ریاضی «اصل خوشترتیبی» نتیجه می‌شود. در واقع فرض کنید اصل استقرای ریاضی درست باشد و «اصل خوشترتیبی» نادرست. مجموعه‌ای ناتهی مانند S از عددهای طبیعی درنظر بگیرید که کوچکترین عضو نداشته باشد. به استقرا ثابت می‌کنیم که هیچ عدد طبیعی

مانند n متعلق به S نیست (که این مطلب با ناتهی بودن S تناقض دارد).

پایهٔ استقرا عبارت است از $n = ۱$. اگر $۱ \in S$، آن‌وقت ۱ کوچکترین عضو S است.

اکنون نوبت اثبات گام استقرایی است. بنابر فرض استقرا، عددهای ۱، ۲، ... و k متعلق به S نیستند. در این صورت اگر $k + ۱ \in S$، آن‌وقت $k + ۱$ کوچکترین عضو S است.

اکنون ثابت می‌کنیم که از اصل خوشترتیبی، اصل استقرای ریاضی نتیجه می‌شود.

فرض کنید که اصل خوشترتیبی درست باشد ولی اصل استقرای ریاضی نادرست. زنجیره‌ای از حکمها را درنظر بگیرید که نخستین حکم آن درست باشد و به‌ازای هر عدد طبیعی مانند k، از درستی حکم kام زنجیرهٔ درستی حکم $(k + ۱)$ام آن نتیجه شود. مجموعهٔ همهٔ عددهای طبیعی مانند n را که حکم nام زنجیره درست نیست، تشکیل دهید. فرض کنید این مجموعه ناتهی و $n_۰$ کوچکترین عضوش باشد. در این صورت حکم $(n_۰ - ۱)$ام درست است اما حکم $n_۰$ام درست نیست. این نتیجه با فرضمان تناقض دارد و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

۱۰. بخش‌پذیری ـ ۲

۳. در راه‌حل مسألهٔ ۲ به‌جای جمع کردن $a - b$ و $c - d$ آنها را از هم کم کنید.

۵. حکم مسأله مستقیماً از حکم مسألهٔ ۴ نتیجه می‌شود.

۸. می‌توان نوشت

$$۳۰^{۹۹} \equiv (-۱)^{۹۹} \equiv -۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۳۱), \qquad ۶۱^{۱۰۰} \equiv (-۱)^{۱۰۰} \equiv ۱ \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۳۱)$$

۹. ب) مستقیماً با ضرب کردن عبارتها می‌توان ثابت کرد که وقتی n عددی فرد است،

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-۱} - a^{n-۲}b + \cdots + (-۱)^{n-۱}b^{n-۱})$$

۱۰. جمعوندهای k^n و $(n - k)^n$ از مجموع داده شده را درنظر بگیرید. چون n عددی فرد است، علامت باقی‌مانده‌های تقسیم k^n و $(-k)^n$ بر n مختلف است. بنابراین مجموع این دو جمعوند بر n بخش‌پذیر است. اما چون این مجموع را می‌توان به $\frac{n-۱}{۲}$ جفت از جمعوندهای از این دست دسته‌بندی کرد نتیجهٔ موردنظر به‌دست می‌آید.

۱۱. هیچ‌یک از عددهای به‌شکل $۸k + ۷$ را نمی‌توان به‌شکل مجموع سه مربع کامل نوشت. در حقیقت، باقی‌ماندهٔ تقسیم هر مربع کامل بر ۸ یکی از عددهای ۰، ۱ یا ۴ است. اکنون به‌آسانی می‌توان بررسی کرد که از تقسیم مجموع هیچ سه تا از باقی‌مانده‌های از این دست بر ۸، باقی‌ماندهٔ ۷ به‌دست نمی‌آید.

۱۳. از اتحاد $x^۲ - y^۲ = (x - y)(x + y)$ استفاده کنید.

۱۴. راهنمایی: ثابت کنید که اگر x عددی مناسب باشد، آن‌وقت $x - ۱۰۰۰۰۰۱$ هم عددی مناسب است.

۱۵. پاسخ: الف) خیر؛ ب) خیر. در حقیقت، آخرین رقم مربع هر عدد از روی آخرین رقم آن عدد مشخص می‌شود. بعد از بررسی همهٔ حالتهای ممکن آخرین رقم و مربعهایشان معلوم می‌شود که آخرین رقم هر مربع کامل یکی از عددهای ۰، ۱، ۴، ۵، ۶ یا ۹ است. البته این راه‌حل را می‌توان برحسب «همنهشتی به‌پیمانهٔ ۱۰» هم بیان کرد.

۱۶. این مسأله چند جواب دارد، مثلاً ۱− یا $n - ۱$. توجه کنید که باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد داده شده بر n برابر با ۱ است.

۱۷. پاسخ: ۵.

۱۸. پاسخ: ۲۸۵۸.

۱۹. الف) چون k بر ۳ بخش‌پذیر است، پس (به‌پیمانهٔ ۳)$k - ۱ \equiv ۲$. برای کامل کردن اثباتِ فقط کافی است به‌یاد بیاورید که باقی‌ماندهٔ تقسیم هیچ مربع کاملی بر ۳، ۲ نمی‌شود.

ب) چون k عددی زوج است و بر ۴ بخش‌پذیر نیست، (به‌پیمانهٔ ۴)$k + ۱ \equiv ۳$. اکنون از اینکه هر مربع کامل به‌پیمانهٔ ۴ فقط با یکی از عددهای ۰ یا ۱ همنهشت است استفاده می‌کنیم.

۲۰. خیر، زیرا $n^۲ + n + ۱$ بر ۵ بخش‌پذیر نیست. در حقیقت، پنج دستهٔ همنهشتی به‌پیمانهٔ ۵ وجود دارد؛ اگر (به‌پیمانهٔ ۵)$n \equiv ۰$، آن‌وقت

$$n^۲ + n + ۱ \equiv ۱ \pmod{۵}$$

اگر (به‌پیمانهٔ ۵)$n \equiv ۱$ آن‌وقت

$$n^۲ + n + ۱ \equiv ۳ \pmod{۵}$$

و همین‌طور تا آخر. بنابراین $n^۲ + n + ۱$ به‌پیمانهٔ ۵ هیچ‌وقت با صفر همنهشت نمی‌شود، یعنی $n^۲ + n + ۱$ بر ۵ و در نتیجه بر ۱۹۵۵ بخش‌پذیر نیست.

۲۲. ثابت می‌کنیم که مجموع مقسوم‌علیه‌های n بر ۳ و ۸ بخش‌پذیر است. برای اثبات اینکه این مجموع بر ۳ بخش‌پذیر است آن را به جفت مقسوم‌علیه‌های به شکل $\left(k, \frac{n}{k}\right)$ دسته‌بندی می‌کنیم (توجه کنید که $\frac{n}{k} \neq k$، زیرا n مربع کامل نیست، چرا؟) و ثابت می‌کنیم که مجموع عددهای هر یک از این جفتها، یعنی $k + \frac{n}{k}$، بر ۳ بخش‌پذیر است. در حقیقت، k بر ۳ بخش‌پذیر نیست (زیرا در غیر این‌صورت n بر ۳ بخش‌پذیر می‌شود که مسلماً چنین چیزی ممکن نیست). بنابراین، یا (به‌پیمانهٔ ۳)$k \equiv ۱$، یا (به‌پیمانهٔ ۳)$k \equiv ۲$. در حالت اول، (به‌پیمانهٔ ۳)$\frac{n}{k} \equiv ۲$ و در حالت دوم، (به‌پیمانهٔ ۳)$\frac{n}{k} \equiv ۱$ (به یاد بیاورید که $n + ۱$ بر ۳ بخش‌پذیر است). از این‌رو، در هر حالت $k + \frac{n}{k}$ مضربی از ۳ است. بخش دوم اثبات (در مورد بخش‌پذیری بر ۸) درست عین همین است.

۲۳. الف) باقی‌مانده‌های تقسیم جمله‌های این دنباله بر ۴ را درنظر می‌گیریم. در این صورت $a_۱ \equiv a_۲ \equiv ۱$(به‌پیمانهٔ ۴). در نتیجه

$$a_۳ \equiv ۱ \times ۱ + ۱ = ۲ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴)$$

$$a_۴ \equiv ۲ \times ۱ + ۱ = ۳ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴)$$

$$a_۵ \equiv ۳ \times ۲ + ۱ \equiv ۳ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴)$$

$$a_۶ \equiv ۳ \times ۳ + ۱ \equiv ۲ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴)$$

$$a_۷ \equiv ۲ \times ۳ + ۱ \equiv ۳ (\text{به‌پیمانهٔ } ۴)$$

و بنابراین دوری به‌دست می‌آید که شامل باقی‌ماندهٔ صفر نیست.

ب) باقی‌مانده‌های تقسیم جمله‌های دنباله بر a_n را درنظر بگیرید. با محاسبه‌ای ساده معلوم می‌شود که

$$a_{n+۱} \equiv ۱ (\text{به‌پیمانهٔ } a_n)$$

$$a_{n+۲} \equiv ۱ (\text{به‌پیمانهٔ } a_n)$$

$$a_{n+۳} \equiv ۲ (\text{به‌پیمانهٔ } a_n)$$

$$\vdots$$

$$a_{n+۶} \equiv ۲۲ (\text{به‌پیمانهٔ } a_n)$$

بنابراین $a_{n+۶} - ۲۲$ بر a_n بخش‌پذیر است و اگر $n + ۶ > ۱۰$، آن‌وقت مسلماً $a_{n+۶} > a_n > ۱$.

۲۵. راهنمایی: توجه کنید که همهٔ توانهای ده از ۱۰۰ به بعد بر ۴ بخش‌پذیرند.

۲۶. وقتی و فقط وقتی عددی بر ۲^n (یا ۵^n) بخش‌پذیر است که عدد حاصل از n رقم آخرش بر ۲^n (یا ۵^n) بخش‌پذیر باشد.

۲۸. دو رقم آخر مربع عدد n فقط از روی دو رقم آخر خود عدد n مشخص می‌شود. فرض کنید $n = \overline{\cdots ab}$ و توجه کنید که

$$\overline{ab}^۲ = (۱۰a + b)^۲ = ۱۰۰a^۲ + ۲۰ab + b^۲$$

اکنون روشن است که رقم دهگان عدد $b^۲$ باید عددی فرد باشد. در این صورت با تحلیل حالت به حالت معلوم می‌شود که رقم یکان عدد $n^۲$ برابر با ۶ است.

۲۹. راهنمایی: باقی‌مانده‌های عددها به‌پیمانهٔ ۱۶ را درنظر بگیرید.

۳۲. پاسخ: الف) خیر؛ ب) خیر. باقی‌مانده‌های عددها به‌پیمانهٔ ۹ را درنظر بگیرید.

۳۳. پاسخ: ۷. باقی‌مانده‌های عددها به‌پیمانهٔ ۹ را درنظر بگیرید.

۳۴. مجموع رقمهای عدد اصلی و مجموع رقمهای عدد مقلوب با هم برابرند و بنابراین باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۹ برابر می‌شوند.

۳۵. این کار را می‌توان به شش طریق مختلف انجام داد: ۱۱۵۵، ۴۱۵۵، ۷۱۵۵، ۳۱۵۰، ۶۱۵۰، ۹۱۵۰. در حقیقت، آخرین رقم عدد حاصل باید ۰ یا ۵ باشد. اما عددهای خواسته شده بر ۳ بخش‌پذیرند؛ یعنی مجموع رقمهایشان باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

۳۶. دو عدد از این دست وجود دارند: ۶۹۷۵ و ۲۹۷۰. برای به‌دست آوردن این عددها راه‌حل مسألهٔ قبل را ببینید.

۳۷. پاسخ: ۱۰۲۳۴۵۷۸۹۶. راهنمایی: ابتدا توجه کنید هر عددی که در نمایش اعشاریش هر ۱۰ رقم بیایند بر ۹ بخش‌پذیر است. بعد به یاد بیاورید که بخش‌پذیری بر ۴ فقط به دو رقم آخر عدد بستگی دارد. بنابراین عدد موردنظر با ... ۱۰ شروع و به رقمی زوج ختم می‌شود. با تحلیل حالت به حالت ساده‌ای پاسخ مسأله به‌دست می‌آید.

۳۸. راهنمایی: در رقمهای یکان عددهای ۲^n $(n \in \mathbb{N})$ و همچنین در باقی‌مانده‌های تقسیم این عددها بر ۳ دور پیدا کنید.

۳۹. پاسخ: خیر. بنابر قاعدهٔ بخش‌پذیری بر ۹ (مسألهٔ ۳۱ را ببینید)، (به‌پیمانهٔ ۹)$۱۹۷۰ \equiv ۸$. اما هیچ مربع کاملی به‌پیمانهٔ ۹ با ۸ همنهشت نیست.

۴۰. چون بعد از نخستین تفریق عدد حاصل بر ۹ بخش‌پذیر می‌شود، هیچ‌یک از عددهایی که در این فرایند به‌دست می‌آوریم مجموع رقمهایش از ۹ کمتر نیست (البته بجز خود عدد صفر). بنابراین اگر عدد اولیه از ۹۹×۹ یا ۸۹۱ بزرگتر نباشد، آن‌وقت آنچه می‌خواستیم ثابت شده است. بررسی درستی حکم مسأله را در مورد بقیهٔ عددهای سه‌رقمی برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۴۱. چون $۴۴۴۴^{۴۴۴۴} < (۱۰^۴)^{۴۴۴۴} = ۱۰^{۱۷۷۷۶}$، پس $A < ۹ \times ۱۷۷۷۶ = ۱۵۹۹۸۴$ و بنابراین $B < ۵ \times ۹ = ۴۵$ (زیرا در میان عددهایی طبیعی که از ۱۵۹۹۸۴ کوچکترند، مجموع رقمهای عدد ۹۹۹۹۹ از همه بیشتر است). اما در میان عددهای کوچکتر از ۴۵ مجموع رقمهای عدد ۳۹ (یعنی عدد ۱۲) از همه بیشتر است و در نتیجه مجموع رقمهای عدد B حداکثر برابر با ۱۲ است. در ضمن می‌دانیم که عددهای A و B (و همچنین مجموع رقمهای عدد B) به‌پیمانهٔ ۹ با $۴۴۴۴^{۴۴۴۴}$ همنهشت‌اند؛ یعنی باقی‌ماندهٔ تقسیم همهٔ آنها هم بر ۹ برابر با ۷ است. اما تنها عددی که از ۱۲ بزرگتر نیست و به‌پیمانهٔ ۹ با ۷ همنهشت است خود عدد ۷ است. بنابراین مجموع رقمهای عدد B باید ۷ باشد.

۴۳ و ۴۴. این عددها بر ۱۱ بخش‌پذیرند.

۴۵. عدد $\overline{aabb}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است در حالی که عدد $\overline{cdcdcdcd}$ این ویژگی را ندارد.

۴۶. مجموعهٔ $\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ را نمی‌توان به دو دستهٔ سه‌تایی طوری تقسیم کرد که تفاضل مجموع عددهای یک دسته و مجموع عددهای دستهٔ دیگر بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

۴۷. این دو عدد هم باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۹ با هم برابرند و هم باقی‌مانده‌های تقسیمشان بر ۱۱.

۴۸. پاسخ: خیر. در حقیقت، اگر هر یک از این چهار رقم را در ۹ ضرب کنید، آن‌وقت رقم یکان حاصل‌ضرب هیچ‌یک از آنها نمی‌شود.

۴۹. در حقیقت می‌توان نوشت

$$\overline{aba} = ۱۰۱a + ۱۰b = ۷(۱۴a + b) + ۳(a + b)$$

۵۰. چون $۲(a + b + c) \equiv ۰$ (به‌پیمانهٔ ۷)، پس

$$\overline{abc} = ۱۰۰a + ۱۰b + c \equiv ۲a + ۳b + c \ (\text{به‌پیمانهٔ } ۷) \equiv b - c (\text{به‌پیمانهٔ } ۷)$$

بنابراین عدد $\overline{abc}$ وقتی و فقط وقتی بر ۷ بخش‌پذیر است که عدد $b - c$ بر ۷ بخش‌پذیر باشد. اکنون چنانچه این را هم به‌حساب بیاوریم که رقمهای b و c هر دو از ۷ کوچکترند، آن‌وقت معلوم می‌شود که تفاضلشان فقط در صورتی بر ۷ بخش‌پذیر است که این دو رقم برابر باشند.

۵۱. الف) می‌توان نوشت می‌توان نوشت

$$\overline{abcdef} = ۱۰۰۰\overline{abc} + \overline{def} = \overline{def} - \overline{abc} (\text{به‌پیمانهٔ } ۷)$$

ب و ج) وقتی و فقط وقتی عددی بر ۷ (یا ۱۳) بخش‌پذیر است که عدد حاصل از عمل زیر بر ۷ (یا ۱۳) بخش‌پذیر باشد: از طرف راست عدد رقمهایش را سه‌تاسه‌تا دسته‌بندی کنید و عددهای حاصل را یکی در میان جمع و تفریق کنید. مثلاً، اگر این قاعده را در مورد عدد ۱۰۳۴۵۶۷۸ به‌کار ببریم عدد ۱۰ + ۳۴۵ − ۶۷۸ یا ۳۴۳ به‌دست می‌آید که بر ۷ بخش‌پذیر است. بنابراین عدد اصلی هم بر ۷ بخش‌پذیر است. در واقع عدد اصلی برابر با ۱۴۷۷۹۵۴ × ۷ است. اثبات این قاعده‌های بخش‌پذیری را برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم؛ در این اثباتها باید از اینکه عدد ۱۰۰۱ بر ۷ (و ۱۳) بخش‌پذیر است استفاده کنید.

۵۲. وقتی و فقط وقتی عددی بر ۳۷ بخش‌پذیر است که اگر رقمهایش را از طرف راست سه‌تاسه‌تا جدا کنیم، مجموع عددهای حاصل بر ۳۷ بخش‌پذیر باشد. مثلاً، اگر این قاعده را در مورد عدد ۸۳۰۹۴۶ به‌کار ببریم، عدد ۹۴۶ + ۸۳۰ یا ۱۷۷۶ به‌دست می‌آید که بر ۳۷ بخش‌پذیر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که عدد ۸۳۰۹۴۶ هم بر ۳۷ بخش‌پذیر است. در حقیقت، این عدد برابر با ۲۲۴۵۸ × ۳۷ است. اثبات این قاعده هم درست عین اثبات قاعده‌های مسألهٔ ۵۱ است. در اینجا از اینکه $۱۰۰۰ \equiv ۱$ (به‌پیمانهٔ ۳۷) استفاده می‌شود.

۵۳. پاسخ: خیر. چون $\overline{abc}-\overline{cba}=۹۹(a-c)$ و $a\neq c$، عدد $\overline{abc}-\overline{cba}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است، ولی بر $۱۱^۲$ بخش‌پذیر نیست.

۵۴. پاسخ: این عدد با سیصد رقم یک نوشته می‌شود. در حقیقت، این عدد بر عددهای ۳ و ۱۱۱...۱۱ (صد تا رقم ۱ در این عدد آمده است) که نسبت به هم اول‌اند بخش‌پذیر است. برای اثبات اینکه این عدد کوچکترین عدد ممکن است ابتدا توجه کنید که تعداد رقمهای عدد موردنظر باید بر ۱۰۰ بخش‌پذیر باشد، زیرا در غیر این‌صورت بر عدد ۱۱۱...۱۱ (صد تا رقم ۱ در این عدد آمده است) بخش‌پذیر نخواهد بود. ثانیاً عددهای ۱۱۱...۱۱ (صد رقم ۱ در این عدد آمده است) و ۱۱۱...۱۱ (دویست رقم ۱ در این عدد آمده است) بر ۳ بخش‌پذیر نیستند.

۵۵. پاسخ: خیر. از راه برهان خلف پاسخمان را ثابت می‌کنیم. فرض کنید چنین چیزی ممکن باشد. باقی‌مانده‌های عددها به‌پیمانهٔ ۵ را درنظر می‌گیریم. چون مجموع نخستین n عدد طبیعی برابر با $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است و

$$۲\left(\frac{n(n+۱)}{۲}+۱\right)=n(n+۱)+۲$$

$\frac{n(n+۱)}{۲}+۱$ باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد (در حقیقت، آخرین رقمهای عدد $n(n+۱)+۲$ عبارت‌اند از ۱۹۹۰ ...). با جایگذاری هر پنج باقی‌ماندهٔ ممکن به‌پیمانهٔ ۵، یعنی عددهای ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴، به‌جای n معلوم می‌شود که عدد $n(n+۱)+۲$ بر ۵ بخش‌پذیر نیست و بنابراین به تناقض می‌رسیم.

۵۷. پاسخ: ۶۹. می‌دانیم که $۱۰۲a+b=۹۰a+۹b$. اگر طرفین این برابری را ساده کنیم به‌دست می‌آید $۳a=۲b$. اکنون فقط کافی است توجه کنیم که a و b دوتا رقم‌اند.

۵۸. چون هر عدد به شکل $\overline{aabb}$ بر ۱۱ بخش‌پذیر است، پس جذر عدد موردنظر باید عددی دورقمی و بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد (یعنی رقمهایش برابر باشند). با محاسبهٔ مربعهای ۹ عدد ۱۱ تا ۹۹ معلوم می‌شود که پاسخ مسأله فقط عدد ۷۷۴۴ یا $۸۸^۲$ است.

۵۹. پاسخ: ۶۲۵ و ۳۷۶. راهنمایی: رقم یکان عددهای موردنظر باید یکی از عددهای ۰، ۱، ۵ یا ۶ باشد. اکنون رقم دهگان و بعد از آن رقم صدگان عددهای خواسته شده را هم به‌همین ترتیب تحلیل کنید. توجه داشته باشید که هیچ‌یک از عددهای ۰۰۰ و یا ۰۰۱ را عددی سه‌رقمی به‌حساب نمی‌آوریم.

۶۰. می‌توانیم ثابت کنیم که دیر یا زود یکی از این عددها بر ۱۱ بخش‌پذیر خواهد شد. در حقیقت، اگر عددی از این دنباله را با x نشان دهیم، آن‌وقت عدد بعدی $۱۰۰x+۴۳$ می‌شود و $۱۰۰x+۴۳\equiv x-۱(۱۱)$ (به‌پیمانهٔ ۱۱). در نتیجه، بعد از حداکثر ۱۰ مرحله، به‌پیمانهٔ ۱۱، عدد حاصل با صفر همنهشت می‌شود.

۶۱. پیش از هر چیز توجه کنید که $۱۳۷ \times ۷۳ = ۱۰۰۰۱$؛ رسیدن به این تجزیه چندان ساده نیست، اما در هر صورت چنین تجزیه‌ای وجود دارد. بعد، برای اثبات اینکه هر عدد دیگر این دنباله مانند ۱۰۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۱ ... هم مرکب است آن را در عدد ۱۱۱۱ ضرب می‌کنیم. عدد حاصل $۴k$ $(k > ۲)$ رقمی است و بنابراین بر عدد x که

$$x = ۱۰۰۰\ldots ۰۰۱ = ۱۰^{۲k} + ۱$$

بخش‌پذیر است؛ در حقیقت،

$$\underbrace{۱۱۱\ldots ۱۱}_{۴k\text{رقم}} = \underbrace{۱۰۰۰\ldots ۰۰۱}_{۲k+۱\text{رقم}} \times \underbrace{۱۱۱\ldots ۱۱}_{۲k\text{رقم}}$$

آخر سر از اینکه x از ۱۱۱۱ بزرگتر و از عدد اصلی کوچکتر است استفاده می‌کنیم. بنابراین عدد اصلی باید بر عدد $\frac{x}{(x, ۱۱۱۱)}$، که از ۱ بزرگتر است، بخش‌پذیر باشد.

۶۳. این معادله ریشهٔ صحیح ندارد. طرف چپ این معادله در هر صورت بر ۳ بخش‌پذیر است، اما طرف راستش هیچ‌وقت بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

۶۵. جوابهای معادله به‌شکل $x = ۱۶k - ۲$ و $y = -۷k + ۱$ هستند که در اینجا k عددی صحیح و دلخواه است.

۶۶. این مسأله را می‌توان به حل یک معادلهٔ دیوفانتی معمولی تبدیل کرد. فرض کنید $z = p$؛ در این صورت

$$۲x + ۳y = ۱۱ - ۵p$$

که در اینجا p را به‌جای متغیر، پارامتری مجهول درنظر می‌گیریم. با استفاده از همان روش قبل این جواب به‌دست می‌آید: $x = ۵p + ۳q - ۱۱$ و $y = ۱۱ - ۵p - ۲q$ و البته $z = p$ که در اینجا p و q عددهایی صحیح و دلخواه‌اند.

این معادله در مجموعهٔ عددهای طبیعی جواب ندارد، زیرا اگر یکی از عددهای x، y و z از ۱ بزرگتر باشند، آن‌وقت مجموع $۲x + ۳y + ۵z$ از ۱۱ بزرگتر می‌شود.

۶۷. ابتدا توجه کنید که وقتی و فقط وقتی می‌توان این سرباز را به خانهٔ مجاور برد که عددهای m و n نسبت به هم اول باشند. در حقیقت، اگر k حرکت به‌طرف راست انجام دهیم (در هر یک از این حرکتها سرباز m خانه به طرف راست منتقل می‌شود) و l حرکت هم به‌طرف چپ، آن‌وقت سرباز در کل $km - ln$ خانه به طرف راست منتقل می‌شود (اگر این عدد منفی باشد، انتقال سرباز در کل به طرف چپ است). عدد ۱ را وقتی و فقط وقتی می‌توان با چنین عبارتی نمایش داد که عددهای m و n نسبت به‌هم اول باشند. مسألهٔ پیدا کردن کمترین تعداد حرکتهای لازم برای

رسیدن به خانهٔ مجاور به‌مراتب دشوارتر است. راهنمایی: ابتدا بهتر است که مسأله را این‌طور بیان کنید: دو عدد طبیعی نسبت به هم اول m و n داده شده‌اند؛ عددهایی طبیعی مانند k و l پیدا کنید که $mk - nl = ۱$ و قدرمطلق مجموع این عددها، $|k+l|$، کمترین مقدار ممکن باشد.

۶۸. پاسخ: $(۹, -۴)$، $(-۲۱, -۱۴)$، $(-۹, ۴)$ و $(۲۱, ۱۴)$. برای حل کردن مسأله همهٔ نمایشهای ممکن عدد اول ۷ به صورت حاصل‌ضرب دو عدد صحیح را بررسی کنید.

۷۰. این معادله هیچ جواب صحیحی ندارد. در حقیقت، در معادلهٔ $(x-y)(x+y) = ۱۴$ دو عامل طرف چپ یا هر دو زوج‌اند و یا هر دو فرد و بنابراین حاصل‌ضربشان باید یا عددی فرد باشد (در صورتی که عددهای $x+y$ و $x-y$ هر دو فرد باشند) و یا بر ۴ بخش‌پذیر (در صورتی که عددهای $x+y$ و $x-y$ هر دو زوج باشند). اما عدد ۱۴ هیچ‌یک از این دو نوع عدد نیست.

۷۱. پاسخ: $(۲, ۰)$، $(۲, ۱)$، $(۰, -۱)$، $(۱, -۱)$، $(۰, ۲)$، $(۱, ۲)$، $(۱, -۰)$ و $(-۱, -۱)$. معادلهٔ اصلی را به معادلهٔ $x(x-۱) + y(y-۱) = ۲$ تبدیل می‌کنیم. چون وقتی $t > ۲$ یا $t < -۱$، حاصل‌ضرب $t(t-۱)$ منفی نمی‌شود و از ۲ بزرگتر است، فقط چند جفت عدد مانند (x, y) را باید بررسی کنیم.

۷۳. این معادله هیچ جواب صحیحی ندارد. راهنمایی: باقی‌مانده‌های عددها به‌پیمانهٔ ۷ را درنظر بگیرید.

۷۵. این معادله هیچ جواب صحیحی ندارد. راهنمایی: باقی‌مانده‌های عددها به‌پیمانهٔ ۵ را درنظر بگیرید.

۷۶. این معادله هیچ جواب صحیحی ندارد. راهنمایی: باقی‌مانده‌های عددها به‌پیمانهٔ ۸ را درنظر بگیرید.

۷۹. پاسخ: این معادله سه دسته جواب به شکل $(۱, a, -a)$، $(b, ۱, -b)$ و $(c, -c, ۱)$ دارد که در آنها a، b و c عددهایی صحیح و دلخواه‌اند (البته غیرصفر) و سه دسته جواب دیگر هم به‌شکل $(۳, ۲, ۶)$، $(۴, ۴, ۲)$ و $(۳, ۳, ۳)$ دارد. (جوابهای دیگر دو دستهٔ اول از جابه‌جایی مؤلفه‌هایشان به‌دست می‌آید). راهنمایی: اگر عددهای a و b و c همگی مثبت باشند، یا دست‌کم یکی از آنها از ۲ بزرگتر نیست یا همگی برابر با ۳ هستند. اگر از این عددها یکی، مثلاً a، منفی باشد، آن‌وقت $۱ > \frac{۱}{c} + \frac{۱}{b}$ و این یعنی اینکه یا $b = ۱$ یا $c = ۱$.

۸۰. پاسخ: $x = \pm ۴۹۸$، $y = \pm ۴۹۶$ و $x = \pm ۷۸$، $y = \pm ۶۴$ (در اینجا علامت x و y را می‌توان مستقل از علامت دیگری انتخاب کرد). برای به‌دست آوردن این پاسخها معادلهٔ موردنظر را این‌طور می‌نویسیم

$$(x-y)(x+y) = ۲ \times ۲ \times ۷ \times ۷۱$$

(توجه کنید که ۷۱ عددی اول است). در اینجا می‌توانیم موقتاً فرض کنیم که x و y مثبت‌اند (بعداً می‌توانیم این عددها را با علامتهای دلخواه درنظر بگیریم). اکنون توجه کنید که عدد ۱۹۸۸ را فقط به دو طریق می‌توان به شکل حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی نوشت که یا هر دو زوج باشند یا

هر دو فرد (راه‌حل مسألهٔ ۷۰ را ببینید): $۹۹۴ \times ۲ = ۱۹۸۸$ و $۱۴۲ \times ۱۴ = ۱۹۸۸$. بنابراین اگر عاملهای $x - y$ و $x + y$ را برابر با این عده‌ها اختیار کنیم راه‌حل مسأله کامل می‌شود.

۸۱. اگر $n = pq$ (که در آن $p, \quad q > ۱$)، آن‌وقت

$$\frac{۱}{n} = \frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n(n-۱)}, \quad \frac{۱}{n} = \frac{۱}{p(q-۱)} - \frac{۱}{pq(q-۱)}$$

اگر n عددی اول باشد، آن‌وقت از معادلهٔ اصلی نتیجه می‌شود $n(y-x) = xy$ و بنابراین xy بر n بخش‌پذیر است. از این رو یا x بر n بخش‌پذیر است یا y. اکنون روشن است که y بر n بخش‌پذیر است، زیرا در غیر این‌صورت $x \geqslant n$ و $\frac{۱}{x} - \frac{۱}{y}$ برابر با $\frac{۱}{n}$ نخواهد بود. در نتیجه، $y = kn$، $x = \frac{kn}{k+۱}$ و $k = n - ۱$. پس فقط به یک طریق نمایش برای $\frac{۱}{n}$ وجود دارد:

$$\frac{۱}{n} = \frac{۱}{n-۱} - \frac{۱}{n(n-۱)}$$

۸۲. پاسخ: این معادله هیچ جواب صحیحی ندارد. راهنمایی: معادلهٔ داده شده را به‌شکل $x^۳ = (۲y-۱)(۲y+۳)$ بنویسید و از اینکه عاملهای طرف راست معادلهٔ حاصل نسبت به هم اول‌اند استفاده کنید.

۸۳. این معادله همان معادلهٔ فیثاغورسی معروف است.

پاسخ: همهٔ جوابهای این معادله را می‌توان این‌طور نوشت

$$x = (a^۲ - b^۲)c$$

$$y = ۲abc$$

$$z = (a^۲ + b^۲)c$$

که در اینجا a، b و c عددهایی صحیح و دلخواه‌اند. راهنمایی: ابتدا عددهای x، y و z را بر بزرگترین مقسوم‌علیه مشترکشان تقسیم کنید تا دو به‌دو نسبت به هم اول شوند.

۸۴. این هم معادلهٔ معروف دیگری به‌نام معادلهٔ پِل است. نام این معادله برگرفته از نام جان پِل، ریاضیدان انگلیسی قرن هفدهم، است. راهنمایی: ابتدا فقط دنبال جوابهای غیرمنفی بگردید. یکی از این جوابها را به‌راحتی می‌توان پیدا کرد: $(۱, ۰)$. اکنون می‌توان همهٔ جوابهای دیگر را از این یکی به‌دست آورد. به‌بیان دقیق‌تر، اگر (a, b) جوابی از معادله‌مان باشد، آن‌وقت $(۳a + ۴b, ۲a + ۳b)$ جواب بعدی است.

۸۶. می‌دانیم که $ka - kb$ بر kn بخش‌پذیر است. بنابراین $k(a-b) = mkn$ و در نتیجه $a - b = mn$ که این همان چیزی است که می‌خواستیم.

۸۷. بنابر قضیهٔ «کوچک» فرما باقی‌ماندهٔ موردنظر برابر با ۱ است.

۸۹. می‌توان نوشت

$$۳۰۰^{۳۰۰۰} = (۳۰۰^{۵۰۰})^{۶} \equiv ۱(\text{به‌پیمانهٔ } ۷)$$

به‌همین ترتیب، $(\text{به‌پیمانهٔ } ۱۱)۱ \equiv ۳۰۰^{۳۰۰۰}$ و $(\text{به‌پیمانهٔ } ۱۳)۱ \equiv ۳۰۰^{۳۰۰۰}$. بنابراین عدد $۳۰۰^{۳۰۰۰} - ۱$ بر عددهای ۷، ۱۱ و ۱۳ و در نتیجه بر ۱۰۰۱ بخش‌پذیر است.

۹۰. پاسخ: ۷. راهنمایی: از قضیهٔ «کوچک» فرما استفاده کنید.

۹۲. راهنمایی: ثابت کنید که عدد داده شده بر ۳۱ بخش‌پذیر است.

۹۳. برای اثبات حکم این مسأله فقط کافی است که برابری و همنهشتیهای زیر را بنویسیم

$$(a+b)^p \equiv (a+b) = a+b \equiv a^p + b^p (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

۹۴. راهنمایی: ثابت کنید که به‌ازای هر عدد صحیح مانند x همنهشتی $x^۵ \equiv x(\text{به‌پیمانهٔ } ۳۰)$ درست است. به این منظور، ثابت کنید که $x^۵ - x$ بر عددهای ۲، ۳ و ۵ بخش‌پذیر است.

۹۵. الف) راهنمایی: ثابت کنید که عدد $p^q + q^p - p - q$ بر p و q بخش‌پذیر است.

۹۶. فرض کنید $b = a^{p-۲}$. در این صورت $ab = a^{p-۱} \equiv ۱(\text{به‌پیمانهٔ } p)$.

۹۷. همهٔ عددهای از ۲ تا $p-۲$ را به جفتهایی طوری دسته‌بندی می‌کنیم که حاصل‌ضرب دو عضو هر یک از این جفتها به‌پیمانهٔ p با ۱ همنهشت باشد (اثبات این را که می‌توان عددهای موردنظر را این‌طور دسته‌بندی کرد برعهدهٔ خواننده می‌گذاریم). بنابراین حاصل‌ضرب همهٔ عددهای از ۲ تا $p-۲$ به‌پیمانهٔ p با ۱ همنهشت می‌شود. در نتیجه

$$(p-۱)! \equiv ۱ \times (p-۱) = p-۱ \equiv -۱(\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

۹۸. چون

$$(n^۸+۱)(n^۸-۱) = n^{۱۶} - ۱ \equiv ۰(\text{به‌پیمانهٔ } ۱۷)$$

یکی از عاملهای طرف چپ باید بر ۱۷ بخش‌پذیر باشد.

۹۹. الف) عدد ۱۱...۱۱۱ (p رقم یک در این عدد آمده است) برابر با $\frac{۱۰^p - ۱}{۹}$ است. اما عدد $۱۰^p - ۱$ بر p بخش‌پذیر نیست، زیرا

$$۱۰^p - ۱ \equiv ۱۰ - ۱ = ۹(\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

ب) عدد ۱۱...۱۱۱ ($p-۱$ رقم یک در این عدد آمده است) برابر با $\frac{۱۰^{p-۱} - ۱}{۹}$ و عدد $۱۰^{p-۱} - ۱$ بر p بخش‌پذیر است، زیرا p هم نسبت به ۱۰ اول است و هم نسبت به ۹.

۱۰۰. **راهنمایی**: از این همنهشتیها استفاده کنید:

$$10^p \equiv 10 \ (\text{به‌پیمانهٔ } p),$$
$$10^{2p} \equiv 100 \ (\text{به‌پیمانهٔ } p),$$
$$\vdots$$
$$10^{8p} \equiv 10^8 \ (\text{به‌پیمانهٔ } p)$$

۱۱. ترکیبیات ـ ۲

۷. پاسخ برابر است با $\binom{10}{3}$ یا ۱۲۰. این مطلب نتیجهٔ مستقیم تعریف تعداد ترکیبهاست.

۸. افسر را می‌توان به سه‌طریق انتخاب کرد، ۲ استوار را به $\binom{6}{2}$ طریق و ۲۰ سرباز را به $\binom{60}{20}$ طریق. بنابراین دستهٔ موردنظر را می‌توان به $3\binom{6}{2}\binom{60}{20}$ طریق انتخاب کرد.

۹. الف) هر مثلث که رأسهایش از نقطه‌های انتخاب شده‌اند یا یک رأس روی خط اول دارد و دو رأس روی خط دوم یا دو رأس روی خط اول دارد و یک رأس روی خط دوم. $10 \times \binom{11}{2}$ مثلث از نوع اول و $11 \times \binom{10}{2}$ مثلث از نوع دوم وجود دارد. بنابراین پاسخ برابر است با

$$10\binom{11}{2} + 11\binom{10}{2}$$

ب) **پاسخ**: $\binom{10}{2}\binom{11}{2} = 2475$.

۱۰. تعداد راههای انتخاب دقیقاً ۰، ۱، ... و ۵ کلمه را از مجموعهٔ مفروض با هم جمع کنید. پاسخ برابر است با

$$\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \binom{15}{3} + \binom{15}{4} + \binom{15}{5} = 4944$$

۱۱. ابتدا سه‌جفت زن و شوهر را انتخاب می‌کنیم. این کار را می‌توان به $\binom{4}{3}$ طریق انجام داد. سه نمایندهٔ این جفتها را می‌توان به 2^3 طریق انتخاب کرد (از هر یک از این سه جفت یا شوهر را انتخاب می‌کنیم یا زنش را). بنابراین $2^3 \times \binom{4}{3}$ یا ۳۲ راه برای انتخاب کمیته وجود دارد.

۱۲. سه حالت ممکن است پیش بیاید، فقط پت عضو تیم باشد، فقط جان عضو تیم باشد یا هیچ‌یک از آنها عضو تیم نباشد. $\binom{29}{10}$ تیم مختلف وجود دارد که پت عضو آنهاست اما جان نیست (زیرا ده نفر هم‌تیمی پت را فقط باید از ۲۹ دانش‌آموز دیگر کلاس انتخاب کرد). به همین ترتیب، $\binom{29}{10}$ تیم وجود دارد که جان عضو آنهاست اما پت نیست. سرانجام، $\binom{29}{11}$ تیم وجود دارد که هیچ‌یک از این دو عضو آن نیستند. به این ترتیب، پاسخ برابر است با $\binom{29}{11} + \binom{29}{10} + \binom{29}{10}$.

۱۳. چون ترتیب حروف صدادار و نیز حروف بی‌صدا معلوم است، همه‌چیز با دانستن جای حروف صدادار معلوم می‌شود. بنابراین $\binom{۷}{۳}$ یا ۳۵ راه برای انتخاب ۳ جا برای حروف صدادار در کلمه‌ای ۷ حرفی وجود دارد.

۱۴. $\binom{۱۲}{۵}$ تیم وجود دارد که هیچ معلمی عضو آنها نیست، $\binom{۱۲}{۴}$ ۱۰ تیم وجود دارد که ۱ معلم و ۴ دانش‌آموز عضو آنهاست، $\binom{۱۲}{۳}\binom{۱۰}{۲}$ تیم وجود دارد که ۲ معلم و ۳ دانش‌آموز عضو آنهاست و $\binom{۱۲}{۲}\binom{۱۰}{۳}$ تیم وجود دارد که ۳ معلم و ۲ دانش‌آموز عضو آنهاست. بنابراین

$$\binom{۱۲}{۵}+۱۰\binom{۱۲}{۴}+\binom{۱۰}{۲}\binom{۱۲}{۳}+\binom{۱۰}{۳}\binom{۱۲}{۲}$$

یا ۲۳۵۶۲ تیم مختلف وجود دارند که ویژگیهای موردنظر مسأله را دارند.

۱۵. ابتدا جای ۱۲ سرباز سفید را روی ۳۲ خانهٔ سیاه صفحهٔ شطرنج انتخاب می‌کنیم. این کار را می‌توان به $\binom{۳۲}{۱۲}$ طریق انجام داد. پس از اینکه سربازهای سفید را قرار دادیم، $\binom{۲۰}{۱۲}$ راه برای قرار دادن ۱۲ سرباز سیاه روی ۲۰ خانهٔ سیاه خالی وجود دارد. **پاسخ:** $\frac{۳۲!}{۱۲!۱۲!۸!}=\binom{۲۰}{۱۲}\binom{۳۲}{۱۲}$.

۱۶. راه‌حل این مسأله شبیه راه‌حل مسألهٔ ۶ است. **پاسخ:** الف) $\frac{\binom{۱۵}{۵}\binom{۱۰}{۵}\binom{۵}{۵}}{۳!}$؛ ب) $\frac{\binom{۱۵}{۵}\binom{۱۰}{۵}}{۲}$.

۱۷. الف) یکی از کارتهایی را که روی آنها عدد ۱ نوشته شده است انتخاب می‌کنیم، بعد نه کارت دیگر را جداگانه از میان ۴۸ کارتی که روی آنها عددی غیر از ۱ نوشته شده انتخاب می‌کنیم. چون انتخاب اول را به ۴ طریق می‌توان انجام داد و انتخاب دوم را به $\binom{۴۸}{۹}$ طریق، پاسخ برابر است با $۴\binom{۴۸}{۹}$.

ب) $\binom{۵۲}{۱۰}$ طریق برای انتخاب ۱۰ کارت از میان کارتهای موردنظر وجود دارد و $\binom{۴۸}{۱۰}$ طریق برای انتخاب ۱۰ کارت که روی آنها عدد ۱ نوشته نشده است. بنابراین $\binom{۵۲}{۱۰}-\binom{۴۸}{۱۰}$ راه برای انتخاب ۱۰ کارت وجود دارد که دست‌کم روی یکی از آنها عدد ۱ نوشته شده است.

۱۸. برحسب اینکه رقم اول عدد موردنظر زوج باشد یا فرد دو حالت وجود دارد. در هر حالت می‌توانید تعداد راهها را با انتخاب جای عددهای فرد حساب کنید. **پاسخ:** $۵^{۵}\times ۴\binom{۵}{۳}+۵^{۶}\binom{۵}{۲}$.

۱۹. **راهنمایی:** همهٔ نمایشهای عددهای ۲، ۳ و ۴ را به‌شکل مجموع چند عدد صحیح غیرمنفی پیدا کنید. فراموش نکنید که رقم اول نباید صفر باشد.

پاسخ: الف) ۱۰؛ ب) $۵۵=۱+۹+۹+\binom{۹}{۲}+۱$؛ ج) $۲۲۰=\binom{۹}{۳}+\frac{۳!}{۲!}\binom{۹}{۲}+\binom{۹}{۱}+\binom{۹}{۱}+۲+۱$.

۲۱. الف) **پاسخ:** $\binom{۴۵}{۶}$.

ب) فرض کنید نتیجه‌ها از قبل معلوم‌اند. در این صورت باید دقیقاً سه عدد از عددهای «خوش‌اقبال» و سه عدد از میان ۳۹ عدد «بداقبال» انتخاب کنیم. پاسخ برابر است با $\binom{۶}{۳}\binom{۳۹}{۳}$ یا ۱۸۲۷۸۰.

۲۲. پاسخ برابر است با تعداد همهٔ زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای ۱۰ عضوی؛ یعنی، $۲^{۱۰}$ یا ۱۰۲۴.
۲۳. هر روشی برای پایین رفتن از پلکان معادل انتخاب چند پله است که می‌خواهید روی آنها بایستید. بنابراین مسأله معادل است با محاسبهٔ تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای ۷ عضوی و در نتیجه جواب برابر است با $۲^{۷}$ یا ۱۲۸.
۲۵. ثابت می‌کنیم که تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ای مفروض از اشیا که تعداد عضوهایشان عددی زوج است برابر است با تعداد زیرمجموعه‌هایی از این مجموعه که تعداد عضوهایشان عددی فرد است. ابتدا یکی از اشیا ـ مثلاً A ـ را انتخاب کنید که در بقیهٔ راه‌حل نقش خاصی دارد. اکنون می‌توانیم همهٔ زیرمجموعه‌ها را به جفتهایی تقسیم کنیم که در هر جفت دو زیرمجموعه وجود دارد، یکی که تعداد عضوهایش عددی زوج است و یکی که تعداد عضوهایش عددی فرد است. برای این کار یکی از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ مفروض را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و اگر A عضو این زیرمجموعه بود A را از آن حذف می‌کنیم و اگر A عضو این زیرمجموعه نبود A را به آن اضافه می‌کنیم. مجموعه‌ای که به این ترتیب به‌دست می‌آید با مجموعهٔ اولیه در یک جفت قرار می‌گیرد و زوجیت تعداد عضوهای این دو زیرمجموعه متفاوت است. به‌سادگی معلوم می‌شود که اگر زیرمجموعهٔ S زیرمجموعهٔ S' را تولید کند، با اعمال همین روند بر S'، S به‌دست می‌آید. بنابراین تقسیم موردنظر را به‌دست می‌آوریم و اثبات کامل شده است.
۲۶. از نتیجهٔ مسألهٔ ۲۵ استفاده کنید.

۲۷ و ۲۸. راهنمایی: از استقرا روی تعداد عددهای روی قطر موردنظر در مثلث پاسکال استفاده کنید.
۲۹. از نتیجهٔ مسأله‌های ۲۷ و ۲۸ استفاده کنید.
۳۰. تعداد راههای پایین رفتن از «قلهٔ» مثلث پاسکال و رسیدن به nامین عدد در سطر $۲n$ام برابر است با $\binom{۲n}{n}$. هر یک از این راهها از دقیقاً یکی از عددهای سطر nام می‌گذرد. چون تعداد چنین راههایی که از kامین عدد می‌گذرند برابر با $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ یا $[\binom{n}{k}]^{۲}$ است، می‌توانیم این عددها را جمع کنیم تا مجموع موردنظر را به‌دست آوریم. یافتن این نوع تعبیر هندسی برای اتحادی جبری یکی از شگردهای زیبای ترکیبیات مقدماتی است.
۳۴. ۱۲ سکهٔ یک ریالی را «توپها» و پنج کیف را «جعبه‌ها» می‌نامیم. در این صورت مسألهٔ موردنظر تقریباً همان مسألهٔ ۳۱ است. پاسخ: $۳۳۰ = \binom{۱۱}{۴} = \binom{۱۲-۱}{۵-۱}$.
۳۵. این‌بار ۱۲ کتاب «توپها» و سه رنگ «جعبه‌ها» هستند. مسألهٔ موردنظر به‌مسأله‌ای شبیه مسألهٔ ۳۲ تبدیل می‌شود، پاسخ:

$$\binom{۱۲+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۱۴}{۲} = ۹۱$$

۳۶. برای بریدن گردنبند به ۸ قطعه لازم است ۸ جا از ۳۰ جایی را که می‌توان در آنها برش انجام داد انتخاب کنیم. بنابراین پاسخ برابر است با $\binom{۳۰}{۸}$.

۳۷. اگر نامزدها «جعبه‌ها» و آرا «توپها» باشند، مسألهٔ موردنظر شبیه مسألهٔ ۳۲ می‌شود. **پاسخ:** $\binom{۳۴}{۴}$.

۳۸. **راهنمایی:** کارتهای تبریک را «توپها» و نوع آنها را «جعبه‌ها» قلمداد کنید. **پاسخ:** الف) $\binom{۲۱}{۹}$؛ ب) $\binom{۱۷}{۹}$.

۳۹. الف) مسافر اول می‌تواند در هر یک از n ایستگاه پیاده شود. مسافر دوم هم می‌تواند در هر یک از n ایستگاه پیاده شود. بنابراین $n \times n$ یا $n^۲$ طریق برای پیاده شدن این دو مسافر وجود دارد. چون مسافر سوم می‌تواند هر یک از n ایستگاه را انتخاب کند، $n \times n^۲$ یا $n^۳$ طریق مختلف برای پیاده شدن این سه نفر از قطار وجود دارد. اکنون معلوم است که اگر در مورد بقیهٔ مسافران هم به همین ترتیب استدلال کنیم به پاسخ n^m می‌رسیم.

ب) این قسمت هم مسأله‌ای دربارهٔ «توپها» (مسافران) و «جعبه‌ها» (ایستگاهها) است. بنابراین پاسخ برابر است با $\binom{n+m-۱}{n-۱}$.

۴۰. این مسأله معادل است با مسألهٔ نمایش عدد ۲۰ به‌صورت مجموع سه عدد صحیح غیرمنفی. **پاسخ:** $\binom{۲۲}{۲}$ یا ۲۳۱.

۴۱. **راهنمایی:** جواب را جداگانه برای توپهای سیاه و سفید پیدا کنید و نتیجه‌ها را در هم ضرب کنید. **پاسخ:** $\binom{۱۰}{۸}\binom{۱۶}{۸}$.

۴۲. کار تقسیم میوه‌ها را به چهار مرحله تقسیم کنید: سیبها، پرتقال، آلو و نارنگی. **پاسخ:** $۳ \times ۳ \times ۳\binom{۸}{۲}$ یا ۷۵۶.

۴۳. چون $\binom{۹}{۵}$ طریق مختلف برای گذاشتن توپهای هر یک از سه‌رنگ در شش جعبهٔ مختلف وجود دارد، پاسخ $\binom{۹}{۵}^۳$ طریق است.

۴۴. الف) هر یک از n نفر رأی‌دهنده می‌تواند به هر یک از n نفر نامزد رأی دهد. بنابراین پاسخ n^n طریق است.

ب) افراد این جماعت را «جعبه‌ها» و رأیها را «توپها» در نظر بگیرید. **پاسخ:** $\binom{۲n-۱}{n-۱}$.

۴۵. توپهای قرمز و سبز را موقتاً سیاه می‌کنیم و توپهای سیاه را در یک ردیف می‌چینیم. چیدن ۱۰ توپ سیاه و ۵ توپ آبی به نحوی که هیچ دو توپ آبی‌ای پشت سر هم نباشند معادل قرار دادن ۵ توپ آبی در ۱۱ «سطل» میان توپهای سیاه و در دو انتهای ردیف توپهای سیاه است، به‌طوری که هیچ دو توپ آبی‌ای در یک سطل نباشند. یعنی، باید ۵ سطل از میان ۱۱ سطل انتخاب کنیم ـ که می‌توان این کار را به $\binom{۱۱}{۵}$ طریق انجام داد. سرانجام، $\binom{۱۰}{۵}$ طریق برای برگرداندن رنگ توپهای سیاه شده به قرمز و سبز وجود دارد. بنابراین، پاسخ $\binom{۱۰}{۵}\binom{۱۱}{۵}$ یا ۱۱۶۴۲۴ طریق است.

۴۶. **راهنمایی:** می‌دانیم $۵^۶ \times ۲^۶ = ۱۰۰۰۰۰۰$. هر یک از عاملها را می‌توان با تعداد ۲ها و ۵های موجود در تجزیهٔ آن کاملاً مشخص کرد. تعداد کل ۲ها ۶ تاست و تعداد کل ۵ها نیز همین است. **پاسخ:** $[\binom{۸}{۲}]^۲$ یا ۷۸۴.

۴۷. کتابهای انتخاب‌شده را کنار می‌گذاریم و هفت کتاب باقی‌مانده را درنظر می‌گیریم. در میان هر دوتا از اینها و در دو انتهای ردیف کتابها، یا جایی خالی (که جای کتابی است که برداشته‌ایم) وجود دارد یا هیچ‌جای خالی‌ای وجود ندارد. مجموعهٔ این جاهای خالی، کتابهای انتخاب شده را به‌طور یکتا مشخص می‌کند. بنابراین پاسخ $\binom{۸}{۵}$ طریق است.

۴۸. چون فقط دو مهرهٔ آبی وجود دارد، نوع گردنبند کاملاً با معلوم بودن فاصلهٔ میان این دو مهره برحسب کمترین تعداد مهره‌های میان آنها (بدون درنظر گرفتن رنگ آنها) مشخص می‌شود. این فاصله فقط سه مقدار دارد: ۰، ۱ و ۲. بنابراین فقط ۳ نوع گردنبند مختلف وجود دارد.

۴۹. راه‌حل قسمتهای این مسأله با به‌کار بردن نتیجه‌های اصلی این فصل به‌دست می‌آیند. **پاسخ:** الف) $۳۰ \times ۲۹ \times ۲۸ \times ۲۷ = ۶۵۷۷۲۰$؛ ب) $\binom{۳۰}{۴} = ۲۷۴۰۵$.

۵۰. ابتدا تعداد همهٔ کلمه‌های شش حرفی را حساب می‌کنیم. هر یک از ۲۶ حرف را می‌توان در هریک از ۶ جای ممکن قرار داد. بنابراین با استفاده از ۲۶ حرف الفبای انگلیسی می‌توان $۲۶^۶$ کلمهٔ شش حرفی مختلف نوشت. $۲۵^۶$ کلمهٔ شش حرفی می‌توان نوشت که در آنها حرف A وجود ندارد (در این حالت فقط می‌توان از ۲۵ حرف استفاده کرد). بنابراین $۲۶^۶ - ۲۵^۶$ یا ۶۴۷۷۵۱۵۱ کلمهٔ شش حرفی وجود دارد که در آنها دست‌کم یک حرف A به‌کار رفته است.

۵۱. می‌توان رسم کردن مسیر موردنظر را از هر یک از شش رأس شش ضلعی شروع کرد. نقطهٔ بعدی را می‌توان به ۵ طریق انتخاب کرد، و همین طور تا آخر. بنابراین !۶ طریق برای رسم راهها وجود دارد. اما در این محاسبه هر راه را دقیقاً شش بار شمرده‌ایم، زیرا می‌توان هر یک از رأسهای آن را رأس اول انتخاب کرد. بنابراین $\frac{۶!}{۶}$ یا !۵ مسیر وجود دارد.

۵۲. الف) هر عدد بخش‌پذیر بر ۴ که با رقمهای مفروض نوشته شود باید به ۱۲، ۲۴ یا ۳۲ ختم شود. در هر یک از این حالتها دو راه مختلف برای استفاده از دو رقم دیگر در ابتدای عدد موردنظر وجود دارد. پاسخ ۲×۳ یا ۶ عدد است.

ب) در این حالت عدد موردنظر باید به ۱۲، ۲۴، ۳۲ یا ۴۴ ختم شود. از هر یک از چهار رقم مفروض می‌توان به‌جای دو رقم باقی‌مانده استفاده کرد. بنابراین پاسخ $۴^۲ \times ۴$ یا ۶۴ عدد است.

۵۳. همه‌چیز با معلوم بودن سه روزی که پدرگلابیها را به دخترش می‌دهد مشخص می‌شود. چون $\binom{۵}{۳}$ طریق برای انتخاب سه روز از پنج روز وجود دارد، پاسخ $\binom{۵}{۳}$ طریق است.

۵۴. $\binom{۲۰}{۶}$ طریق برای انتخاب ۶ بازیگر برای اجرای اول وجود دارد. در هر یک از این حالتها ۱۴ بازیگر نقشی در اجرای اول ندارند. $\binom{۱۴}{۶}$ طریق برای انتخاب ۶ بازیگر برای اجرای دوم وجود دارد. پاسخ $\binom{۱۴}{۶}\binom{۲۰}{۶}$ طریق است.

۵۵. درهرمکان هریک از رقمها دقیقاً $۴^۲$ یا ۱۶ باربه‌کار می‌رود. پاسخ $(۴+۳+۲+۱) \times ۱۱۱۱ \times ۱۶$ یا ۱۷۷۶۰ است.

۵۶. شش کارت را می‌توان به دو طریق در میان چهار دسته توزیع کرد: $۳ + ۱ + ۱ + ۱$ و $۲ + ۲ + ۱ + ۱$. تعداد راههای مختلف انتخاب طریق اول را حساب می‌کنیم. می‌توانیم دسته‌ای را که شامل ۳ کارت است به ۴ طریق انتخاب کنیم. $\binom{۱۳}{۳}$ طریق برای انتخاب ۳ کارت از این دسته وجود دارد. برای انتخاب یک کارت از دسته‌های باقی‌مانده ۱۳ راه وجود دارد. بنابراین پاسخ $۱۳^۳ \times \binom{۱۳}{۳} \times ۴$ است. به‌همین ترتیب معلوم می‌شود که در مورد طریق دوم توزیع پاسخ $۱۳^۲ \times \binom{۱۳}{۲}^۲ \times \binom{۴}{۲}$ است. بنابراین پاسخ مسأله $۱۳^۲\binom{۱۳}{۲}^۲\binom{۴}{۲} + ۱۳^۳\binom{۱۳}{۳}۴$ طریق است.

۵۷. **پاسخ**: $\binom{۱۳}{۳}\binom{۶}{۳}$ یا ۵۷۲۰. راه‌حل مسألهٔ ۴۱ را ببینید.

۵۸. معلوم است که ۱۰ عدد صحیح یک رقمی وجود دارد که ویژگی موردنظر مسأله را دارند. تعداد عددهای طبیعی دورقمی با ویژگی موردنظر را پیدا می‌کنیم. رقم اول عددی طبیعی دورقمی می‌تواند هر رقمی بجز ۰ باشد. رقم دوم می‌تواند هر یک از ۹ رقم متفاوت با رقم اول باشد. بنابراین $۹^۲$ عدد طبیعی دورقمی وجود دارد که دو رقمشان با هم فرق دارد. $۹^۳$ عدد طبیعی سه‌رقمی وجود دارد که ویژگی موردنظر مسأله را دارند، زیرا ۹ رقم (هر رقمی بجز رقمی که برای دومین رقم از آن استفاده شده) برای انتخاب رقم سوم داریم. اگر به همین ترتیب استدلال را ادامه دهیم به پاسخ نهایی می‌رسیم: $۹^۶ + ۹^۵ + ۹^۴ + ۹^۳ + ۹^۲ + ۱۰$.

۵۹. مسأله‌ای دیگر را درنظر می‌گیریم:

به‌چند طریق می‌توانیم از میان ۳۶ کارت موردنظر ۱۸ کارت طوری انتخاب کنیم که در میان این ۱۸ کارت دقیقاً دو کارت با شمارهٔ ۱ وجود داشته باشد؟

ابتدا دو تا از کارتهایی را که روی آنها عدد ۱ نوشته شده است انتخاب می‌کنیم. سپس شانزده کارت دیگر از میان ۳۲ کارتی که روی آنها عددی غیر از ۱ نوشته شده است انتخاب می‌کنیم. بنابراین، پاسخ مسألهٔ جدید $\binom{۳۲}{۱۶}\binom{۴}{۲}$ طریق است. اکنون توجه کنید که با انتخاب ۱۸ کارت، دسته کارت را به دو نیم کرده‌ایم. اما هر طریق ممکن برای تقسیم موردنظر را دو بار شمرده‌ایم. بنابراین پاسخ مسأله $\frac{\binom{۴}{۲}\binom{۳۲}{۱۶}}{۲}$ طریق است.

۶۰. الف) رخ می‌تواند به هر یک از ۲۸ خانه‌ای که در دو انتها قرار دارند برود یا از آنها رد شود. بنابراین، پاسخ $۲^{۲۸}$ طریق است.

ب) پاسخ برابر است با تعداد راههای نمایش عدد ۲۹ به‌صورت مجموع هفت عدد طبیعی که ترتیب آنها مهم است. **پاسخ**: $\binom{۲۸}{۶}$ طریق.

۶۱. فرض کنید که هیچ‌یک از قایقرانان از میان ده نفری که می‌خواهند طرف چپ بنشینند انتخاب نشده باشند. در این صورت چهار قایقرانی را که باید در طرف چپ بنشینند باید از میان نه نفری انتخاب کرد که نشستن در طرفی خاص مد نظرشان نیست. چهار قایقرانی را که باید در طرف چپ بنشینند باید از میان هفده نفر (دوازده نفرکه می‌خواهند در طرف راست بنشینند و پنج نفر از

میان نه نفری که طرفی خاص مد نظرشان نیست و برای نشستن در طرف چپ انتخاب نشده‌اند). بنابراین در این حالت $\binom{۱۷}{۴}\binom{۹}{۴}\binom{۱۰}{۰}$ طریق انتخاب وجود دارد. اکنون فرض می‌کنیم که دقیقاً یکی از قایقرانانی که می‌خواهند در طرف چپ بنشینند انتخاب شده است. در این صورت سه نفر قایقران دیگر سمت چپ را باید از میان نه نفر انتخاب کرد. همچنین، چهار قایقران سمت راست را باید از میان هجده نفر انتخاب کرد. بنابراین در این حالت $\binom{۱۸}{۴}\binom{۹}{۳}\binom{۱۰}{۱}$ انتخاب داریم. با در نظر گرفتن سه حالت آخر (دو، سه یا چهار قایقران از ده نفری که می‌خواهند در طرف چپ بنشینند انتخاب شوند) به پاسخ نهایی می‌رسیم:

$$\binom{۱۰}{۰}\binom{۹}{۴}\binom{۱۷}{۴}+\binom{۱۰}{۱}\binom{۹}{۳}\binom{۱۸}{۴}+\binom{۱۰}{۲}\binom{۹}{۲}\binom{۱۹}{۴}$$
$$+\binom{۱۰}{۳}\binom{۹}{۱}\binom{۲۰}{۴}+\binom{۱۰}{۴}\binom{۹}{۰}\binom{۲۱}{۴}$$

۶۲. هر مستطیل بدون اینکه ابهامی ایجاد شود با رأسهای بالا سمت چپش و پایین سمت راستش مشخص می‌شود. برای به‌دست آوردن مستطیلی علامت‌دار، رأس بالا سمت چپ باید روی سطری با شماره‌ای کوچکتر از یا برابر با p و ستونی با شماره‌ای کوچکتر از یا برابر با q قرار داشته باشد. رأس پایین سمت راست باید روی سطری با شماره‌ای بزرگتر از یا برابر با p و ستونی با شماره‌ای بزرگتر از یا برابر با q قرار داشته باشد. بنابراین pq جای مختلف برای رأس بالا سمت چپ و $(m-p+۱)(n-q+۱)$ جای مختلف برای رأس پایین سمت راست وجود دارد. بنابراین

$$pq(m-p+۱)(n-q+۱)$$

مستطیل خانهٔ علامت‌دار را در بر دارند.

۶۳. ملخ باید ۲۷ بار جهش کند، ۹ جهش در هر سمت. جهشهای در سمت اول را با حرف A، جهشهای در سمت دوم را با حرف B و جهشهای در سمت سوم را با حرف C نشان می‌دهیم. در این صورت می‌توان هر مسیری را که ملخ طی می‌کند بی‌آنکه ابهامی پیش بیاید با کلمه‌ای ۲۷ حرفی که در آن از هر یک از حروف A، B و C دقیقاً ۹ بار استفاده شده است، مشخص کرد و مسأله تبدیل به شمردن تعداد این کلمه‌ها می‌شود. اگر این کار را مانند مسأله‌های ۱۷ تا ۲۱ فصل «ترکیبیات ـ ۱» انجام دهیم پاسخ به‌دست می‌آید: $\frac{۲۷!}{(۹!)^۳}$.

۱۲. ناورداها

۴. پاسخ: ۲۱! − ۱

۵. می‌توانیم از مقدار زیر به‌عنوان ناوردا استفاده کنیم: به هر گنجشک اندیسی مخصوص نسبت می‌دهیم که برابر است با شمارهٔ درختی که در حال حاضر روی آن نشسته است (شماره‌ها را از

چپ به راست حساب می‌کنیم). در این صورت S، مجموع این اندیسها، مقدار موردنظر است. در حقیقت، پس از پروازکردن هر دو گنجشک فقط اندیسهایشان فرق می‌کند ـ یکی از آنها به‌اندازهٔ عددی مانند x کم می‌شود و دیگری به همین مقدار زیاد می‌شود. بنابراین مجموع S ناورداست. در ابتدا مقدار S برابر است با ۶ + ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱ یا ۲۱ و اگر همهٔ گنجشکها روی درختی با شمارهٔ k باشند، مقدار S برابر با $6k$ است. چون ۲۱ بر ۶ بخش‌پذیر نیست نتیجه می‌گیریم که ممکن نیست گنجشکها روی یک درخت جمع شوند.

از طرف دیگر، اگر هفت گنجشک و هفت درخت وجود داشته باشد، در ابتدا $S =$ ۲۸، که بر ۷ بخش‌پذیر است و اینکه همهٔ گنجشکها روی یک درخت جمع شوند بعید نیست. در حقیقت، به‌سادگی می‌توانید دنباله‌ای از پروازها را مشخص کنید که منجر به وضعیت موردنظر شوند: همهٔ گنجشکها روی درخت میانی‌اند.

۶. راهنمایی: ثابت کنید زوجیت تعداد خانه‌های سیاه جدول ناورداست.

۷. راهنمایی: ثابت کنید زوجیت تعداد خانه‌های سیاه در میان چهار خانهٔ گوشه‌ای تحت تغییر رنگ ناورداست.

۸. این مسأله را می‌توان دقیقاً به‌همان روش مسألهٔ ۷ حل کرد، در اینجا باید مجموعه‌ای از چهار خانه با همان ویژگی درنظر بگیریم. یکی از این مجموعه‌ها چهار خانه‌ای است که مربعی ۲ × ۲ در گوشهٔ بالا سمت چپ جدول تشکیل می‌دهد.

۹. راهنمایی: از زوجیت مجموع همهٔ عددهای روی تخته‌سیاه به‌عنوان ناوردا استفاده کنید.

۱۳. الف) صفحه را به طریق زیر رنگ کنید: سطرهایی که شماره‌شان فرد است با سیاه و سطرهایی که شماره‌شان زوج است با سفید. در این صورت چند مربعی ۴ × ۱ را هر طورکه روی صفحه قرار دهیم تعدادی زوج از خانه‌های سفید را می‌پوشاند. علاوه بر این، چندمربعی شکل ۹۴ همواره تعدادی فرد از خانه‌های سفید را می‌پوشاند. از این دو موضوع نتیجه می‌شود که تعداد کل خانه‌های سفیدی که پوشانده می‌شوند عددی فرد است، در حالی که این تعداد باید ۳۲ باشد. تناقض به‌دست آمده راه‌حل را کامل می‌کند.

ج) از رنگ‌آمیزی شبیه قسمت (الف) منتها با چهار رنگ استفاده کنید. چون هر چندمربعی یا چهار خانه به یک رنگ یا چهار خانه با چهاررنگ مختلف را می‌پوشاند، نتیجه می‌گیریم که تفاضل تعداد خانه‌های به رنگ A و خانه‌های به رنگ B بر ۴ بخش‌پذیر است (صرفنظر از اینکه A و B کدام رنگها باشند). از محاسبه‌ای ساده معلوم می‌شود که ۲۶۵۲ خانه از رنگ اول، ۲۶۵۲ خانه از رنگ دوم، ۲۵۵۰ خانه از رنگ سوم و ۲۵۵۰ خانه از رنگ چهارم وجود دارد. تفاضل میان تعداد خانه‌های به رنگهای اول و سوم ۱۰۲ است که بر ۴ بخش‌پذیر نیست. راه‌حل کامل شده است.

۱۴. رنگ‌آمیزی شکل ۱۵۴ را که با چهار رنگ انجام شده است درنظر می‌گیریم. در این صورت هر کاشی ۲ × ۲ دقیقاً یک خانه از رنگ ۱ را پوشانده است و هر کاشی ۴ × ۱ یا اصلاً خانه‌ای به رنگ ۱ ندارد یا دقیقاً دو خانه به رنگ ۱ را پوشانده است. بنابراین، زوجیت تعداد چندمربعیهای ۲ × ۲ با زوجیت تعداد خانه‌های به رنگ ۱ یکسان است. حکم از این مطلب نتیجه می‌شود: پس از اینکه زوجیت تعداد چندمربعیهای ۲ × ۲ تغییر کرد (مثلاً وقتی که یکی از آنها کم شود) دیگر نمی‌توانیم صفحه را بدون همپوشانی فرش کنیم.

۲	۳	۲	۳
۱	۴	۱	۴
۲	۳	۲	۳
۱	۴	۱	۴

شکل ۱۵۴

۱۶. باقی‌ماندهٔ تقسیم تعداد سرهای اژدها بر ۷ را به‌عنوان ناوردا درنظر می‌گیریم. استفاده از هر یک از شمشیرها این باقی‌مانده را تغییر نمی‌دهد و چون ۰ و ۱۰۰ به‌پیمانهٔ ۷ همنهشت نیستند، متأسفانه پاسخ منفی است.

۱۷. می‌توان از باقی‌ماندهٔ تقسیم تفاضل تعداد دالرها و دیلرهای مرد تاجر بر ۴ به‌عنوان ناوردا استفاده کرد. چون در ابتدا این تفاضل ۱ است، مرد تاجر نمی‌تواند کاری کند که این تفاضل صفر شود.

۱۸. چون ماشین دکتر گیزمو پس از هر عمل تعداد سکه‌ها را چهارتا افزایش می‌دهد، باقی‌ماندهٔ تقسیم تعداد سکه‌ها بر ۴ ناورداست. اما باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲۶ و ۱ بر ۴ فرق دارد. بنابراین ممکن نیست در انتها ۲۶ سکه داشت.

۲۰. پاسخ ۸ است. چون باقی‌ماندهٔ تقسیم عددی طبیعی بر ۹ و باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع رقمهایش بر ۹ یکسان است، باقی‌ماندهٔ $۸^{۱۹۸۹}$ با باقی‌ماندهٔ نتیجهٔ نهایی، که آن را x می‌نامیم، یکسان است. بنابراین، باقی‌ماندهٔ x به‌پیمانهٔ ۹ برابر با ۸ است، و می‌دانیم x رقم است. در نتیجه $x = ۸$.

۲۱. نوع آمیب B است. زوجیت تفاضلهای $N(A) - N(B)$، $N(B) - N(C)$ و $N(C) - N(A)$ را که در آنها $N(X)$ تعداد آمیبهای از نوع X است درنظر بگیرید. در حین ادغام این زوجیتها تغییر نمی‌کنند. یعنی، به‌ویژه، در آخر کار (وقتی که فقط یک آمیب در لولهٔ آزمایش مانده است) زوجیت تعداد آمیبهای نوع A و آمیبهای نوع C یکسان است، که فقط وقتی ممکن است که تنها آمیب باقی‌مانده از نوع B باشد.

۲۲. پس از هر حرکت مجموع شمارهٔ سطر و ستون خانه‌ای که سرباز روی آن است یا دو تا کم می‌شود یا یکی زیاد می‌شود. بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم این مجموع بر ۳ هر بار یکی زیاد می‌شود. چون در

کل ۱ − $n^۲$ حرکت داریم، و مجموع آخری باید یکی بیشتر از مجموع اولیه باشد، پس ۲ − $n^۲$ باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد، که ممکن نیست (باقی‌ماندهٔ هیچ مربع کاملی بر ۳ برابر با ۲ نیست). بنابراین سرباز نمی‌تواند چنین مسیری را طی کند.

یادداشت. توجه‌تان را به این نکته جلب می‌کنیم که در این راه‌حل از کلمهٔ «ناوردا» صحبت نکرده‌ایم. البته، مقداری ناوردا وجود دارد. می‌توانید آن را پیدا کنید؟

۲۳. چون مجموع عددهای هر سطر برابر با ۱ است و m سطر داریم، مجموع همهٔ عددهای در جدول برابر با m است. از طرف دیگر مجموع عددهای هر ستون برابر با ۱ است و n ستون داریم. بنابراین مجموع همهٔ عددهای در جدول برابر با n است. اما مجموع عددهای در جدول به روش محاسبهٔ آن بستگی ندارد (از این نظر، این مسأله مربوط به ناورداهاست). بنابراین $m = n$.

۲۴. پاسخ منفی است. **راهنمایی**: از زوجیت تعداد لیوانهایی که وارونه‌اند به‌عنوان ناوردا استفاده کنید.

۲۵. چهار رأس مکعب را طوری نشان کنید که هیچ دو تایی از آنها دو سر یک یال نباشند (این کار ساده است). سپس تفاضل میان مجموع عددهای روی رأسهای نشان‌شده و مجموع عددهای روی بقیهٔ رأسها را در نظر بگیرید. این تفاضل تحت عملهایی که در مسأله گفته شده ناوردا هستند. با استفاده از این ناوردا به‌سادگی می‌توانیم ثابت کنیم که پاسخ هر دو سؤال مسأله منفی است.

۲۶. از یکی از قطاعها شروع به شماره‌گذاری کنید و قطاعها را با عددهای از ۱ تا ۶ شماره بزنید. سپس تفاضل مجموع عددهای نوشته شده در قطاعهای ۱، ۳ و ۵ و مجموع عددهای نوشته شده در قطاعهای ۲، ۴ و ۶ را در نظر بگیرید. این مقدار ناورداست و در ابتدا مقدارش ۱± است. بنابراین ممکن نیست برابر با صفر شود و پاسخ منفی است.

۲۷. فقط می‌توانیم کارتهایی به شکل (a,b) را که در آنها $a < b$ و $b - a$ بر ۷ بخش‌پذیر است به‌دست بیاوریم.

۲۸. پاسخ منفی است. فرض کنید S برابر با مجموع تعداد خرده‌سنگها و تعداد کپه‌ها باشد. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که مقدار S ناورداست و مقدار اولیه‌اش ۱۰۰۲ است. اگر k کپه داشته باشیم که در هر کدام دقیقاً ۳ خرده‌سنگ وجود داشته باشد، مقدار S برابر است با $۳k + k$ یا $۴k$، که ممکن نیست برابر با ۱۰۰۲ باشد، زیرا ۱۰۰۲ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

۲۹. پاسخ منفی است. **راهنمایی**: از مقدار زیر به‌عنوان ناوردا استفاده کنید: زوجیت تعداد زوجهایی مانند (a,b) که در اینجا a عدد سمت راست عدد b است و $a > b$.

۳۰. مجموع مربعهای عددهای هر سه‌تایی پس از عمل گفته شده در مسأله تغییر نمی‌کند. اگر این مقدار را به‌عنوان ناوردا در نظر بگیریم، به‌سادگی معلوم می‌شود که پاسخ منفی است (مقدار ناوردا برای سه‌تاییهای مفروض مختلف است: $\frac{۱۳}{۲} \neq ۲\sqrt{۲} + ۶$).

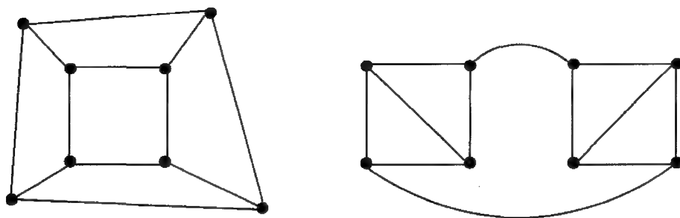
۱۳. گرافها ـ ۲

۲. چون ۴ یال وجود دارد که از چهار تا از رأسها خارج شده‌اند، پس هر یک از این رأسها به بقیه وصل است. یعنی رأس پنجم هم به بقیهٔ رأسها وصل است؛ پس درجه‌اش ۴ است. این تناقض راه‌حل را کامل می‌کند.

۳. راهنمایی: از استقرا روی n استفاده کنید. پایهٔ استقرا (وقتی که $n = ۱$) ساده است. برای اثبات گام استقرایی، گراف $۲n$ رأسی G را درنظر بگیرید که در شرطهای مسأله صدق می‌کند و دو رأس دیگر مانند A و B به آن اضافه کنید که، تا اینجای کار، به هیچ‌یک از رأسهای G وصل نشده باشند. گراف G دو خانواده از رأسها مانند $V_۱$ و $V_۲$ دارد که هرکدام n رأس دارند که درجه‌هایشان برابر است با ۱، ۲، ... و n. یکی از رأسهای جدید ـ مثلاً A ـ را به همهٔ رأسهای خانوادهٔ $V_۱$ و نیز رأس B وصل کنید. گراف حاصل گرافی $۲n + ۲$ رأسی است که ویژگی موردنظر را دارد.

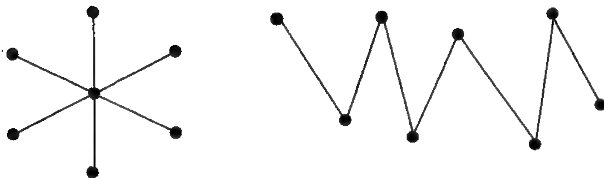
۴. الف) بله، چون در چنین گرافی هر رأس به بقیهٔ رأسها وصل است؛ یعنی، گراف موردنظر با گراف کامل ۱۰ رأسی یکریخت است.

ب) خیر ـ شکل ۱۵۵ را ببینید.



شکل ۱۵۵

ج) خیر ـ شکل ۱۵۶ را ببینید.



شکل ۱۵۶

۵. فرض کنید بتوان چنین یالی را حذف کرد. اگر این یال دو رأس با درجه‌های برابر را به هم وصل کند، آن‌وقت تعداد رأسهای فرد در هر مؤلفهٔ همبندی عددی فرد است، که ممکن نیست. در غیر این صورت، فقط یکی از مؤلفه‌ها رأسی با درجهٔ ۲ دارد و ممکن نیست مؤلفه‌ها یکریخت باشند.

۹. یکی از مؤلفه‌های همبندی گراف مفروض را در نظر بگیرید. این مؤلفه درخت نیست، زیرا رأسی آویز ندارد. بنابراین دور دارد.

۱۰. فرض کنید دو سر یال حذف شده در گراف جدید با مسیری ساده به هم وصل باشند. در این صورت این مسیر به همراه یال حذف شده دوری در گراف قدیمی تشکیل می‌دهند ـ تناقض.

۱۲. راهنمایی: اگر این گراف درخت نباشد، با حذف کردن برخی یالهایش می‌توانیم از آن درخت به‌دست آوریم.

۱۴. تعداد کل راهها در این کشور $\binom{۳۰}{۲}$ است. چون تعداد یالها در درختی ۳۰ رأسی برابر با ۲۹ است پاسخ چنین است: $\frac{۳۰ \times ۲۹}{۲} - ۲۹ = ۴۰۶$.

۱۵. راهنمایی: درختی ماکسیمال در گراف مفروض انتخاب کنید و رأسهای آویزش را حذف کنید.

۱۶. راهنمایی: درختی ماکسیمال درگراف مفروض در نظر بگیرید. هر یال این درخت را مضاعف کنید (۹۹ یال داریم). هر چند که نتیجه واقعاً گراف نیست، اما قضیهٔ اویلر در مورد کشیدن گرافها با قلم بدون برداشتن آن از روی کاغذ در مورد این «گراف چندگانه» هم درست است.

۱۷. گرافی مسطح درنظر بگیرید که رأسهایش دریاچه‌ها هستند، یالهایش نهرها هستند و وجه‌هایش جزیره‌ها. چون $V - E + F = ۲$، $V = ۷$ و $E = ۱۰$، پس $F = ۵$. البته، یکی از وجه‌ها وجه بیرونی است که جزیره نیست. پاسخ: ۴ جزیره.

۱۹. راهنمایی: هر وجه را دست‌کم سه یال احاطه کرده‌اند.

۲۴. نابرابری $E \leqslant ۳V - ۶$ در مورد این گراف درست نیست و در نتیجه این گراف مسطح نیست.

۲۵. فرض کنید حکم درست نباشد. در این صورت $۶V \leqslant ۲E$؛ یعنی $۳V \leqslant E$، که با نابرابری ثابت شده تناقض دارد.

۲۶. فرض کنید هر دو گراف مسطح باشند. در این صورت روی‌هم حداکثر

$$(۳ \times ۱۱ - ۶) + (۳ \times ۱۱ - ۶)$$

یا ۵۴ یال دارند. اما گراف کامل ۱۱ رأسی باید ۵۵ یال داشته باشد، یعنی به تناقض رسیده‌ایم.

۲۷. راهنمایی: ابتدا با استفاده از اینکه درجهٔ هر رأس دست‌کم ۳ است نابرابری $E \leqslant ۳V - ۶$ را ثابت کنید. اگر تعداد پنج‌ضلعیها را a و تعداد شش‌ضلعیها را b بنامیم، معلوم می‌شود که

$$۵a + ۶b + ۷ = ۲E \leqslant ۶F - ۱۲ = ۶(a + b + ۱) - ۱۲$$

بنابراین $a \geqslant ۱۳$.

۲۹. الف) خیر، زیرا گراف موردنظر ۱۲ رأس فرد دارد. یعنی دست‌کم به ۶ خط شکسته احتیاج داریم.

ب) بله، می‌توان. از خواننده می‌خواهیم که مثالی بیابد.

۳۰. گرافی که با دایره‌ها تشکیل می‌شود (نقطه‌های برخورد دایره‌ها، رأسها و کمانهای دایره‌ها یالهای این گراف‌اند) همبند است و درجهٔ همهٔ رأسهایش زوج‌اند.

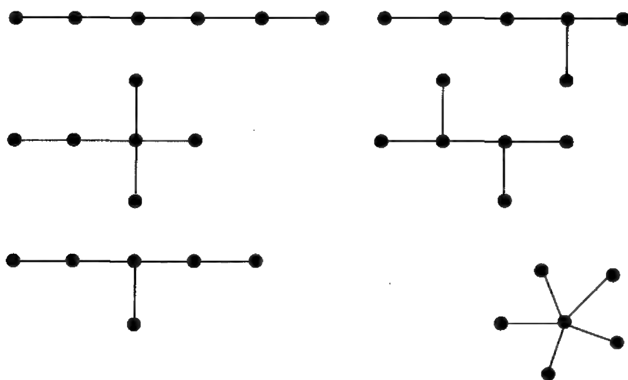
۳۱. اثبات را می‌توان به استقرا روی n انجام داد. پایهٔ استقرا، وقتی که $n = ۰$، واضح است. برای اثبات گام استقرایی دو رأس فرد مانند A و B انتخاب می‌کنیم و آنها را به‌طور ذهنی با یالی جدید به هم وصل می‌کنیم. پس از این کار، گراف جدید فقط $۲n - ۲$ رأس فرد دارد و می‌توان آن را طوری کشید که قلم دقیقاً $n - ۱$ بار از روی کاغذ برداشته شود. به‌هنگام ترسیم، وقتی که می‌خواهیم از روی AB، یالی که به‌طور ذهنی اضافه کرده‌ایم (و وجود واقعی ندارد)، بگذریم، قلم را از روی کاغذ برمی‌داریم و در انتهای دیگر این یال آن را باز هم روی کاغذ می‌گذاریم.

۳۲. راهنمایی: دو دانشمند بیابید که با هم آشنا نیستند و همهٔ افرادی را که با آنها آشنا هستند درنظر بگیرید.

۳۳. اگر فرض کنیم حکم درست نباشد، در میان هرگروهی از دانش‌آموزان که تعدادشان عددی از ۶۸ تا ۱۰۱ است، دقیقاً سه دانش‌آموز وجود دارند که تعداد دوستانشان با هم برابر است. در این صورت تعداد دانش‌آموزانی که تعداد دوستانشان عددی فرد است، عددی فرد است، که ممکن نیست.

۳۴. راهنمایی: این دو رأس را با مسیری به هم وصل کنید. اگر طول این مسیر برابر با a باشد، زوجیت طول هر رأس تا این دو رأس با زوجیت a یکسان است.

۳۵. راهنمایی: ثابت کنید هر درخت شش رأسی با یکی ازگرافهای شکل ۱۵۷ یکریخت است.



شکل ۱۵۷

۳۶. الف و ب) این قسمتها نتیجهٔ قسمتهای (ج) و (د)اند.

ج) فرض کنید حکم درست نباشد. شهری دلخواه مانند X و شهری مانند A در نظر بگیرید که نتوان از X از طریق خط هوایی با حداکثر یک بار پیاده و سوار شدن به A رفت و نیز شهری

مانند B درنظر بگیرید که نتوان از X از طریق راه‌آهن با حداکثر یک بار پیاده و سوار شدن به B رفت. اکنون توجه کنید که شهرهای A و B از طریق یکی از راههای حمل و نقل گفته شده به‌هم وصل‌اند. بدون اینکه ازکلی بودن استدلالمان چیزی کم شود می‌توانیم فرض کنیم A و B از طریق راه‌آهن به‌هم وصل‌اند. بنابر فرض X و A از طریق راه‌آهن به هم وصل‌اند و در نتیجه، می‌توانیم از X با قطار با یک بار پیاده و سوار شدن در A به B برویم، که تناقض است.

د) راهنمایی: فرض کنید نتوانیم با حداکثر دو بار پیاده و سوار شدن از A به B پرواز کنیم و نتوانیم با حداکثر دو بار پیاده و سوار شدن از C به D برویم. گرافی را در نظر بگیرید که از این چهار شهر تشکیل شده است.

۳۷. مسألهٔ ۲۸ فصل «اصل لانه‌کبوتری» را ببینید.

۳۸. رأسی دلخواه در نظر بگیرید و توجه کنید که دست‌کم شش یال یکرنگ از این رأس خارج شده‌اند. اکنون از مسألهٔ ۳۷ استفاده کنید.

۳۹. فرض کنید رأسی وجود داشته باشد که شش یال آبی از آن خارج شده‌اند. در این صورت می‌توانیم از مسألهٔ ۳۷ استفاده کنیم. اگر رأسی وجود داشته باشد که حداکثر چهار یال آبی از آن خارج شده باشد (ممکن نیست که از هر نه رأس پنج یال آبی خارج شده باشد)، دست‌کم چهار یال قرمز وجود دارند که از این رأس خارج شده‌اند.

۴۰. از هر رأس دست‌کم ۹ یال یکرنگ خارج شده است. اکنون از مسألهٔ ۳۹ استفاده کنید.

۴۲. فرض کنید تعداد راههایی که به پایتخت وارد می‌شوند a باشد. در این صورت تعداد کل راههای «ورودی» برابر با $۲۱ \times ۱۰۰ + a$ و تعداد کل راههای خروجی حداکثر $۲۰ \times ۱۰۰ + (۱۰۰ - a)$ است. بنابراین

$$۲۱ \times ۱۰۰ + a \leqslant ۲۰ \times ۱۰۰ + (۱۰۰ - a)$$

یعنی $۲a \leqslant ۰$؛ پس $a = ۰$.

۴۳. شهرها را شماره‌گذاری کنید و هر جاده را از شهر با شمارهٔ کوچکتر به سمت شهر با شمارهٔ بزرگتر یک‌طرفه کنید.

۴۴. راهنمایی: ابتدا همهٔ رأسهای متصل به رأس انتخاب شدهٔ A را درنظر بگیرید، بعد رأسهای جدید را که به این رأسها وصل‌اند، و همین‌طور تا آخر. ضمن گسترش این «شبکه» (تا جایی که می‌توانیم) یالهایی را که رأسهای تازه اضافه‌شده را به رأسهای قدیمی وصل می‌کنند از سمت رأس قدیمی به سمت رأس جدید جهت‌دار می‌کنیم.

۴۵. راهنمایی: مسیری اویلری درنظر بگیرید که از همهٔ یالهای گراف می‌گذرد و یالها را براساس ترتیبشان در این دور جهت‌دار کنید.

۴۶. راهنمایی: ثابت کنید مسیری بسته از روی پیکانها وجود دارد که از روی هر یال دقیقاً یک بار می‌گذرد. برای این کار مسیر بسته‌ای را درنظر بگیرید که تعداد یالهایش بیشترین مقدار ممکن است.

۴۸. فرض کنید A برندهٔ تورنمنت باشد. اگر تیمی وجود داشته باشد که A و نیز همهٔ تیمهایی را که به A باخته‌اند برده باشد، باید امتیازش از A بیشتر باشد، که ممکن نیست. حکم هر دو قسمت مسأله از این مطلب نتیجه می‌شود.

۴۹. راهنمایی: از استقرا روی تعداد شهرها استفاده کنید. پایهٔ استقرا (وقتی که تعداد شهرها سه‌تاست) با تحلیل مورد به مورد اثبات می‌شود. برای اثبات گام استقرایی، شهری را که جاده‌هایی هم به آن وارد می‌شوند هم خارج می‌شوند موقتاً در نظر نگیرید.

۵۰. حکم را به استقرا روی n، تعداد تیمها، ثابت می‌کنیم. اثبات پایهٔ استقرا، وقتی که $n = ۲$، ساده است. برای اثبات گام استقرایی موقتاً یکی از تیمها، مثلاً تیم X، را کنار می‌گذاریم و بقیهٔ $n - ۱$ تیم را آن‌طورکه می‌خواهیم شماره‌گذاری می‌کنیم. اگر X تیم ۱ را برده باشد یا به این $n - ۱$ تیم باخته باشد، به‌سادگی می‌توانیم آن را به زنجیر تیمهای شماره‌گذاری شده اضافه کنیم. در حالت دیگر، X به تیم ۱ باخته است و $n - ۱$ تیم را برده است. بنابراین عددی مانند k وجود دارد که X به تیم k باخته است و تیم $k + ۱$ را برده است ـ در غیر این صورت x باید به تیم ۲، در نتیجه به تیم ۳، در نتیجه به تیم ۴، و همین‌طور بقیهٔ تیمها، باخته باشد. با پیدا کردن چنین kای می‌توانیم X را در زنجیر موجود با ایجاد شکافی بین تیمهای k و $k + ۱$ بگنجانیم و زنجیر موردنظر را به‌دست بیاوریم.

۵۱. فرض کنید تعداد تیمهایی که تیمهای A و B برده‌اند برابر باشد و تیم B تیم A را برده باشد. در این صورت اگر هر تیمی مانند C که به A باخته است به B هم باخته باشد، آن‌وقت امتیاز تیم B باید از امتیاز تیم A بیشتر باشد. بنابراین تیمی مانند C وجود دارد که تیم A تیم C را برده است و تیم C تیم B را.

۵۲. الف) راهنمایی: فرض کنید نتوانیم از شهر A به شهر B برویم. شهرهایی را در نظر بگیرید که جاده‌هایی که از A خارج می‌شوند به این شهرها ختم شوند و نیز شهرهایی را درنظر بگیرید که جاده‌هایی که به B وارد می‌شوند از این شهرها خارج شده‌اند.

ب) راهنمایی: با همان نمادگذاری قسمت (الف)، می‌توانیم فرض کنیم که هیچ جاده‌ای از A به B وجود ندارد و هیچ شهری مانند C وجود ندارد که جاده‌ای از A به C و جاده‌ای از C به B وجود داشته باشد. چهل شهر مانند $A_۱$، $A_۲$، ... و $A_{۴۰}$ پیدا می‌کنیم که جاده‌هایی که از A خارج می‌شوند به این شهرها ختم شوند و چهل شهر دیگر (!) مانند $B_۱$، $B_۲$، ... و $B_{۴۰}$ پیدا می‌کنیم که جاده‌هایی که به B وارد می‌شوند از این شهرها خارج شده باشند. در این صورت ۱۶۰۰ جاده وجود دارد که از A_iها خارج شده‌اند. در همین وضعیت، تعداد کل جاده‌هایی که A_iها را به هم وصل می‌کنند حداکثر $\frac{۴۰ \times ۳۹}{۲}$ یا ۷۸۰ است و تعداد جاده‌هایی که از این شهرها به سوی ۱۹ شهر دیگر خارج می‌شوند حداکثر ۱۹×۴۰ یا ۷۶۰ است. چون

$$۱۶۰۰ > ۱۵۴۰ = ۷۸۰ + ۷۶۰$$

پس باید جاده‌ای از A_i به B_j وجود داشته باشد.

۵۳. راهنمایی: فرض کنید یال میان رأسهای A و B را حذف کرده‌ایم. دو رأس دلخواه در نظر بگیرید و سه حالت را بررسی کنید: هیچ‌یک از این دو رأس A یا B نباشد؛ یکی از آنها یا A باشد یا B؛ یا این دو رأس همان A و B باشند.

۱۴. هندسه

۱. **راهنمایی:** طول ضلع سوم مثلثی که طول دو ضلعش a و b است چه مقادیری ممکن است باشد.

۲. **راهنمایی:** نابرابریهای $AM > AB - \frac{BC}{2}$ و $AM > AC - \frac{BC}{2}$ را ثابت کنید.

۳. دایرهٔ محاطی مثلث و طول پاره‌خطهایی را که نقطه‌های تماس روی ضلعهای مثلث ایجاد می‌کنند در نظر بگیرید. سه جفت پاره‌خطها به طولهای برابر داریم که طولهای آنها مقدارهای x، y و z موردنظرند.

۴. فرض کنید حکم درست نباشد. در این صورت یکی از زاویه‌ها از دیگری بزرگتر است و طول ضلع متناظرش باید از طول دو ضلع دیگر بیشتر باشد.

۵. **راهنمایی:** از نابرابریهای $\angle BAM < \angle ABM$ و $\angle CAM < \angle ACM$ استفاده کنید.

۶. این مسأله تمرینی ساده برای نحوهٔ استفاده از نابرابری شمارهٔ ۱ است. اگر $a + b > c$، آن‌وقت

$$a + 2\sqrt{ab} + b > c$$

یا $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c})^2$ و در نتیجه $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c}$.

۷. چون $AB + CD < AC + BD$ (راستی، چرا؟) می‌توانیم حکم موردنظر را با جمع کردن این نابرابری با نابرابری داده شده در صورت مسأله به‌دست بیاوریم.

۹. چون $\angle A_1 > \angle A$، پس $BD > B_1D_1$ و در نتیجه $\angle C_1 > \angle C$. اگر $\angle B_1 > \angle B$، به‌طور مشابه معلوم می‌شود $\angle D_1 > \angle D$، که ممکن نیست، زیرا مجموع زاویه‌های داخلی چهارضلعیها باید برابر باشد.

۱۰. **راهنمایی:** متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را رسم کنید که سه رأسش بر رأسهای مثلث ABC منطبق‌اند و D از امتداد دادن میانهٔ موردنظر به‌اندازهٔ خودش به‌دست می‌آید. اکنون از نابرابری شمارهٔ ۲ استفاده کنید.

۱۱. پاسخ: خیر. از نابرابری شمارهٔ ۲ نتیجه می‌شود

$$\angle BAC > \angle BCA = \angle DCE > \angle DEC = \cdots > \angle KAI = \angle BAC$$

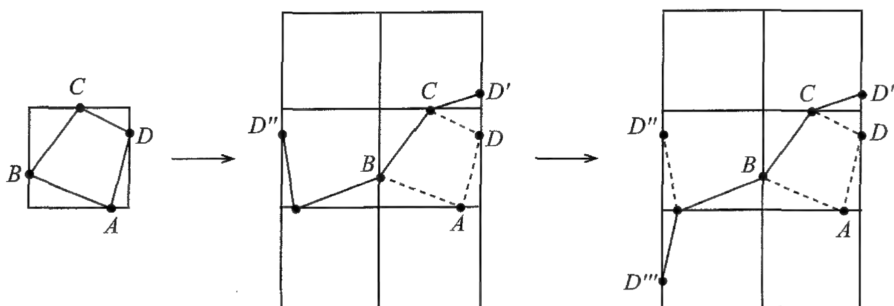
که تناقض است!

۱۲. الف) **راهنمایی:** سه نسخه از مثلث مفروض را طوری روی صفحه قرار دهید که ساقهایشان بر هم منطبق باشد. اکنون به‌دنبال مثلثی متساوی‌الاضلاع بگردید.

ب) نقطهٔ E را طوری روی ضلع AB انتخاب کنید که $AE = AC$. سپس ثابت کنید $EB > CE > AC$.

۱۳. راهنمایی: اگر محیط بیرونی را با a، محیط ستاره را با b و محیط درونی را با c نشان دهیم، آن‌وقت $a > c$، $a + c < b$ و $2a > b$. اکنون با بررسی حالت به حالت راه‌حل کامل می‌شود.

۱۴. محیط چهارضلعی موردنظر را مانند شکل ۱۵۸ «بازکنید».



شکل ۱۵۸

۱۵. مثلث دوم را در سه گام طوری حرکت دهید که هر سه رأسش بر رأسهای مثلث اول منطبق شود (هر بار یک رأس).

۱۶. الف) ثابت کنید هر نقطه ثابت می‌ماند.

ب) از قسمت (الف) استفاده کنید.

۱۷. الف) پاسخ: باز هم انتقال است.

ب) دو خط موازی درنظر بگیرید که بر جهت انتقال عمودند و فاصلهٔ آنها برابر با نصف طول انتقال است.

ج) این حرکت ممکن نیست دوران باشد، زیرا نقطه‌ای وجود ندارد که در جایش ثابت بماند. انتقال هم ممکن نیست باشد، زیرا فاصلهٔ میان نقطه‌ها و تصویرهایشان ثابت نیست. سرانجام، تقارن نسبت به خط هم ممکن نیست باشد: اگر باشد، هر نقطه مانند A و تصویرش، A'، را که در نظر بگیریم، عمودمنصف پاره‌خط AA' خطی ثابت است و به‌نحوهٔ انتخاب نقطهٔ A بستگی ندارد.

۱۸. پاسخ مثبت است. کافی است یکی از مرکزها را بر دیگری تصویر کنیم.

۱۹. فقط دوران همانی می‌تواند نیمصفحه را بر خودش تصویر کند: در غیر این صورت، کناره‌ها کجا می‌روند؟ با تقارن نسبت به خط می‌توان این کار را کرد، به‌شرطی که این خط بر کنارهٔ نیمصفحه عمود باشد.

۲۰. بله، درست است. در حقیقت، ترکیب هشت تا از این دورانها دورانی ۲۴ درجه حول همان نقطه است. علاوه بر این، ترکیب سه‌تا از این برهمنهیها دورانی به‌اندازهٔ ۷۲ درجهٔ حول نقطهٔ O است.

۲۱. راهنمایی: مثلث را نسبت به نقطهٔ مفروض قرینه کنید. جایی که مثلث و تصویرش بر هم قرار می‌گیرند دو سر پاره‌خط موردنظرند.

۲۲. راهنمایی: از انتقال استفاده کنید.

۲۴. راهنمایی: چون خطهای (AB)، (CD) و (MN) در یک نقطه به هم می‌رسند، تقارن نسبت به خط (MN) خطهای (AB) و (CD) را بر هم تصویر می‌کند.

۲۵. راهنمایی: از دورانی ۹۰ درجه استفاده کنید که مربع را بر خودش تصویر می‌کند.

۲۶. راهنمایی: از دورانی ۶۰ درجه حول نقطهٔ P استفاده کنید و نقطهٔ برخورد خط اول و تصویر خط دوم را در نظر بگیرید.

۲۷. الف) راهنمایی: اگر دو نقطهٔ مفروض X و Y در طرفهای مختلف خط L قرار داشته باشند، آن‌وقت $M = (XY) \cap L$؛ در مورد دیگر، $M = (XY_1) \cap L$، که در آن Y_1 قرینهٔ Y نسبت به L است.

ب) راهنمایی: اگر X و Y در طرفهای مختلف خط L قرار داشته باشند، آن‌وقت $M = (XY) \cap L$؛ در غیر این صورت، $M = (XY_1) \cap L$، که در آن Y_1 قرینهٔ Y نسبت به L است.

۲۸. راهنمایی: محور اول را نسبت به محور دوم قرینه کنید. ثابت کنید تصویر حاصل باید محور تقارنی برای مثلث باشد. همچنین، ثابت کنید که ممکن نیست دو خط اول بر هم عمود باشند.

۲۹. الف) A، B، C، D، E، H، I، K، M، O، T، U، V، W، X و Y.

ب) H، I، N، O، S، X و Z.

پاسخ بستگی به این دارد که چگونه حروف را بنویسید. در اینجا از حروف رومن تایپی رایج استفاده کرده‌ایم.

۳۰. پاسخ منفی است. به‌عنوان راهنمایی، مسألهٔ ۲۸ را ببینید.

۳۱. راهنمایی: نقطه‌های موردنظر نقطه‌هایی هستند که از آنها پاره‌خط OS (O مرکز دوران است) به زاویهٔ $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ یا $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ دیده می‌شود (α زاویهٔ دوران است). می‌توانید توصیف دقیقتری برای مکان هندسی موردنظر بیابید.

۳۴. خیر. راهنمایی: اگر دو نیمساز بر هم عمود باشند، مجموع این دو زاویهٔ مثلث 180° می‌شود.

۳۵. فرض کنید خط L بر خطهای AB و CD عمود باشد و از مرکز دایره بگذرد. در این صورت پاره‌خطهای AC و BD نسبت به خط L متقارن‌اند.

۳۶. راهنمایی: مجموع دو زاویهٔ روبه‌رو در چهارضلعی محاطی باید ۱۸۰ درجه باشد. پاسخ: 60°، 90° و 120°.

۳۸. به‌سادگی معلوم می‌شود که اندازهٔ زاویهٔ AOD برابر با 60° است. علاوه بر این، مثلث DOC متساوی‌الساقین است، در نتیجه $\angle DOC = 75^\circ$. بنابراین $\angle AOC = 135^\circ$.

۳۹. زاویه‌های ABC و ABD برابر با 90°اند. بنابراین $\angle CBD = 180^\circ$.

۴۰. الف) فرض کنید $|AB| = a$، $|BC| = b$، $|CD| = c$ و $|DA| = d$. در این صورت b از طول ارتفاع وارد بر ضلع AB در مثلث ABC بیشتر نیست. بنابراین $S_{ABC} \leqslant \frac{ab}{2}$ و $S_{CDA} \leqslant \frac{cd}{2}$. با جمع کردن این نابرابریها حکم به‌دست می‌آید.

ب) از قسمت (الف) و اینکه می‌توان چهارضلعی $ABCD$ را به چهارضلعی‌ای تبدیل کرد که مساحتش همان مساحت چهارضلعی $ABCD$ باشد، اما ترتیب ضلعهایش a، b، d و c باشد استفاده کنید (چهارضلعی را از روی قطر AC ببرید و یکی از نیمه‌ها را «برگردانید»).

۴۲. چون $1 \leqslant \frac{bc}{2}$، پس $2 \leqslant b^2$.

۴۳. بله، ممکن است. مساحت ABC را درنظر بگیرید که در آن $AC = 2002 + \varepsilon$ و $AB = BC = 1001$ (در اینجا ε عددی مثبت و به قدرکافی کوچک است؛ مثلاً $\varepsilon = 0/1$).

۴۴. $ABCD$ را از روی قطر AC ببرید و برابری موردنظر را برای هر دو نیمه جداگانه ثابت کنید. فراموش نکنید که ضلعهای $KLMN$ با قطرهای $ABCD$ موازی‌اند.

۴۵. به‌سادگی می‌توان ثابت کرد که مساحت چهارضلعی‌ای که قطرهایش برهم عمودند برابر با نصف حاصل‌ضرب قطرهایش است. در این مسأله، $S_{ABCD} = 12$.

۴۶. پاسخ: ۷. راهنمایی: ثابت کنید که مساحت هر یک از مثلثهای اضافه شده برابر با ۲ است.

۴۷. برابری مساحتها معادل برابری ارتفاعهای وارد بر BM به‌ترتیب از A و C است. این هم معادل است با اینکه BM، AC را نصف کند.

۴۸. از مسألهٔ ۴۴ استفاده کنید.

۴۹. راهنمایی: ثابت کنید مساحت مثلثهای ABD و ACD برابر است.

۵۰. اگر نقطهٔ O درون مثلث متساوی‌الاضلاع ABC باشد، مساحت مثلث ABC برابر با مجموع مساحتهای مثلثهای OAB، OBC و OAC می‌شود. می‌توان این مساحتها را برحسب عمودهای وارد از O بر ضلعهای مثلث پیدا کرد.

۵۵. خیر، دروغ می‌گوید. مثلاً، می‌توانیم ثابت کنیم که نقطه‌هایی روی صفحه وجود دارند که ویژگی موردنظر را دارند و هر چقدر که بخواهیم از نقطهٔ موردنظر دورند (در حقیقت، مجموعهٔ مفروض سهمی است).

۵۶. علت غلط بودن اثبات غلط بودن شکل است؛ نقطهٔ M بیرون مثلث قرار دارد.

۵۷. چون فاصلهٔ P از A و B و نیز از C و D برابر است، مثلثهای PAD و PBC همنهشت‌اند. بنابراین در این مثلثها میانه‌های PM و PN هم برابرند.

۵۸. یکی از راهها این است که ثابت کنیم این عمودمنصف ضلع زاویهٔ قائمهٔ بلندتر را به دو پاره‌خط طوری تقسیم می‌کند که یکی از آنها برابر است با طول قسمت گفته شده از عمودمنصف و طول

پاره‌خط دیگر دو برابر طول این پاره‌خط است. راه دیگر این است که مستقیماً طولها را برحسب طول یکی از ضلعهای مثلث اصلی حساب کنید.

۵۹. **راهنمایی:** از این مطلب استفاده کنید که هر یک از قطعه‌های این خط شکسته میانهٔ وارد بر وتر در مثلثی قائم‌الزاویه و در نتیجه برابر با نصف این وتر است.

۱۵. مبناهای عددی

راه‌حل تمرینها

۱. الف) ۲؛ ب) n.

۲. $۱۰۱۰۱_۲ = ۲۱,\ ۱۰۱۰۱_۳ = ۹۱,\ ۲۱۱_۴ = ۳۷,\ ۱۲۶_۷ = ۶۹,\ ۱۵۸_{۱۱} = ۱۸۴$

۳. $$۱۰۰_{۱۰} = ۱۱۰۰۱۰۰_۲ = ۱۰۲۰۱_۳ = ۱۲۱۰_۴ = ۴۰۰_۵ = ۲۴۴_۶ = ۲۰۲_۷$$
$$= ۱۴۴_۸ = ۱۲۱_۹$$

۴. $۱۱۱_{۱۰} = A۱_{۱۱}$

۵. جدول ضرب در مبنای ۵ را در زیر نوشته‌ایم.

	۰	۱	۲	۳	۴
۰	۰	۰	۰	۰	۰
۱	۰	۱	۲	۳	۴
۲	۰	۲	۴	۱	۳
۳	۰	۳	۱	۴	۲
۴	۰	۴	۳	۲	۱

۶. الف) $۱۱۰۰۱_۲$؛ ب) $۲۱۲۰۲_۳$

۷. الف) $۲۶۲۶_۷$؛ ب) $۱۰۰۳_۷$.

مسأله‌ها

۱. **پاسخ:** بله، در دستگاه با مبنای ۱۲ درست است. **راهنمایی:** رقمهای ۳ و ۴ همواره عددهای $۳_{۱۰}$ و $۴_{۱۰}$ هستند و حاصل‌ضربشان برابر است با $۱۲_{۱۰}$.

۲. الف) بله، چنین دستگاهی وجود دارد: دستگاه با مبنای ۷. **راهنمایی:** مسألهٔ قبل را ببینید.
ب) **پاسخ:** خیر. این تساویها فقط در دستگاه با مبنای ۵ ممکن است درست باشند، اما در این دستگاه رقم ۵ وجود ندارد.

۳. وقتی و فقط وقتی عددی زوج است که

الف) تعداد رقمهای ۱ در نمایش آن در مبنای ۳ عددی زوج باشد (یعنی، مجموع رقمهایش عددی زوج باشد). در حقیقت، هر عدد برابر است با مجموعی از توانهای ۳ ضرب در یکی از رقمهای ۰، ۱ یا ۲. جمعوندهای متناظر با رقمهای ۰ و ۲ زوج‌اند و در نتیجه، زوجیت این مجموع بستگی به تعداد جمعوندهای متناظر با رقمهای ۱ دارد.

ب) به‌ازای nهای زوج، نمایش آن در مبنای n به رقمی زوج ختم شود؛ به‌ازای nهای فرد مجموع رقمهایش زوج باشد. اثبات حالت اخیر شبیه اثبات قسمت (الف) است. در حالتی که n زوج است، وقتی عددی به‌شکل مجموع توانهای n ضرب در رقمهای این عدد نوشته می‌شود همهٔ جمعوندها از دومی به بعد زوج‌اند، زیرا بر n بخش‌پذیرند. بنابراین زوجیت مجموع موردنظر با زوجیت رقم یکان مشخص می‌شود.

۴. پاسخ $۲۳۴۵۱ + ۱۵۶۴۲ = ۴۲۴۲۳$ (در مبنای ۷) است.

۵. فرض کنید مبنای دستگاه n باشد. در این صورت $n^۲ = (۲n + ۴) + (۳n + ۲)$؛ یعنی $n^۲ - ۵n - ۶ = ۰$، بنابراین $n = -۱$ یا $n = ۶$. پاسخ: $n = ۶$.

۶. الف) در دستگاه با مبنای n نمایش عددی وقتی و فقط وقتی به k صفر ختم می‌شود که این عدد بر n^k بخش‌پذیر باشد.

ب) فرض کنید m مقسوم‌علیهی از n باشد. رقم آخر نمایش عددی در مبنای n وقتی و فقط وقتی بر m بخش‌پذیر است که خود این عدد بر m بخش‌پذیر باشد.

۷. الف) فرض کنید m مقسوم‌علیهی از $n - ۱$ باشد. در این صورت مجموع رقمهای نمایش عددی در مبنای n وقتی و فقط وقتی بر m بخش‌پذیر است که خود این عدد بر m بخش‌پذیر باشد.

ب) مجموع «متناوب» (با علامتهای «متناوب») رقمهای نمایش عددی در مبنای n وقتی و فقط وقتی بر $n + ۱$ بخش‌پذیر است که خود این عدد بر $n + ۱$ بخش‌پذیر باشد.

ج) فرض کنید m مقسوم‌علیهی از $n + ۱$ باشد. مجموع متناوب (با علامتهای متناوب) رقمهای نمایش عددی در مبنای n وقتی و فقط وقتی بر m بخش‌پذیر است که خود این عدد بر m بخش‌پذیر باشد.

۱۲. راهنمایی: مجموعهٔ موردنظر همان است که در مسألهٔ ۱۱ گفتیم.

۱۳. الف) این بازی همان بازی نیم است که در آن به‌جای سه کپه، هشت کپه داریم. استراتژی و اثبات درستی آن هم دقیقاً همان است. البته، اثبات ساده‌تر دیگری هم وجود دارد که نشان می‌دهد بازیکن دوم می‌برد. در حقیقت، همهٔ آنچه که بازیکن دوم باید انجام دهد این است که متقارن بودن مهره‌های روی صفحه (نسبت به خطی که ستونهای چهارم و پنجم را جدا می‌کند) حفظ کند.

ب) بازیکن دوم نمی‌تواند ببازد. دلیل این امر مانند قبل است. این بازی واقعاً هیچ ربطی به بازی نیم ندارد. در حقیقت، این بازی ممکن است تا قیامت تمام نشود، که البته چیز مهمی نیست.

۱۶. نابرابریها

۲. الف) توجه کنید که $۲^۳ = ۸ < ۹ = ۳^۲$ و در نتیجه $۲^{۳۰۰} < ۳^{۲۰۰}$.

ب) توجه کنید که $۳^۷ = ۲۱۸۷ > ۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$ و در نتیجه $۳^{۲۸} > ۲^{۴۰}$.

ج) عدد $۴^{۵۳}$ بزرگتر است.

۴. پاسخ: $۷^{۹۲} < ۸^{۹۱}$.

۶. پاسخ: $۱ = |۳^۲ - ۲^۳|$، $۲ = |۳^۳ - ۵^۲|$، $۴ = |۲^۵ - ۶^۲|$، $۵ = |۲^۵ - ۳^۳|$، $۳ = |۵^۳ - ۲^۷|$، $۴ = |۵^۳ - ۱۱^۲|$ و $۷ = |۲^۷ - ۱۱^۲|$.

۸. صورت یکی از کسرها را x می‌نامیم. در این صورت خود این کسر برابر است با $a = \frac{x}{۱۰x - ۹}$ و در نتیجه $\frac{۱}{a} = ۱۰ - \frac{۹}{x}$. در نتیجه اگر x بزرگ شود، a کوچک می‌شود. بنابراین کسر اول بزرگتر است.

۹. پاسخ مسأله‌ای کلیتر را پیدا می‌کنیم: چه وقت $\frac{x+۱}{y+۱}$ از $\frac{x}{y}$ بزرگتر است؟ اگر x و y مثبت باشند،

$$\frac{x}{y} - \frac{x+۱}{y+۱} = \frac{x-y}{y(y+۱)}$$

بنابراین همه چیز بستگی به این دارد که x بزرگتر است یا y. در مورد مسألهٔ ما $x < y$، یعنی $\frac{۱۲۳۴۵۶۸}{۷۶۵۴۳۲۲}$ بزرگتر است.

۱۰. عدد $۱۰۰^{۱۰۰}$ بزرگتر است، زیرا $۵۰ \times ۱۵۰ < ۱۰۰^۲$.

۱۱. پاسخ: $(۱/۰۱)^{۱۰۰۰} > ۱۰۰۰$. در حقیقت، $(۱/۰۱)^۸ > ۱/۰۸$ و

$$(۱/۰۱)^{۱۰۰۰} = \left((۱/۰۱)^۸\right)^{۱۲۵} > (۱/۰۸)^{۱۲۵}$$

علاوه بر این، $(۱/۰۸)^۵ > ۱/۴$ و

$$(۱/۰۱)^{۱۰۰۰} > (۱/۴)^{۲۵} > (۱/۴)^{۲۴} > (۲/۷)^۸ > ۷^۴ = ۲۴۰۱ > ۱۰۰۰$$

۱۳. چون $۱۰۰ < ۹۹!$، معلوم است که $A < B$.

۱۷. می‌توان نوشت $۱ + x - ۲\sqrt{x} = (\sqrt{x} - ۱)^۲ \geqslant ۰$.

۱۹ و ۲۰. اگر همهٔ جمله‌ها را به یک طرف نابرابری بیاوریم نابرابری موردنظر تبدیل می‌شود به $(x-y)^۲ \geqslant ۰$.

۲۱. اگر همهٔ جمله‌ها را به یک طرف بیاوریم و مخرجها را در هم ضرب کنیم نابرابری موردنظر تبدیل می‌شود به $(x-y)^۲ \geqslant ۰$.

۲۳. سه نابرابری

$$a+b \geqslant 2\sqrt{ab}, \quad b+c \geqslant 2\sqrt{bc}, \quad c+a \geqslant 2\sqrt{ca}$$

را در هم ضرب کنید.

۲۴. **راهنمایی:** از نابرابری

$$(\sqrt{ab}-\sqrt{ac})^2+(\sqrt{ac}-\sqrt{bc})^2+(\sqrt{bc}-\sqrt{ab})^2 \geqslant 0$$

استفاده کنید.

۲۵. توجه کنید که

$$x^2+y^2+1-xy-x-y=\frac{1}{2}\left((x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2\right) \geqslant 0$$

۲۷. توجه کنید که

$$x^4+y^4+8=x^4+y^4+4+4 \geqslant 4\sqrt[4]{x^4y^4 \times 4 \times 4}=8xy$$

۲۸. می‌توان نوشت

$$a+b+c+d \geqslant 4\sqrt[4]{abcd}, \qquad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{1}{abcd}}$$

اکنون این نابرابریها را در هم ضرب کنید.

۲۹. می‌توان نوشت

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{a}{b} \times \frac{b}{c} \times \frac{c}{a}}=3$$

۴۱. **راهنمایی:** نابرابری موردنظر را می‌توان با جمع کردن نابرابریهای ساده‌تر

$$(2^k-1)(2^l-1)(2^m-1)>0$$

$$2^{k+l+m}>2^k+2^l+2^m$$

به‌دست آورد؛ در مورد نابرابری دوم توجه کنید که (اگر $k \geqslant l \geqslant m$)

$$2^{k+l+m}>2^{k+2}=4 \times 2^k>2^k+2^l+2^m$$

۴۲. توجه کنید که

$$ab+bc+ca=\frac{1}{2}\left((a+b+c)^2-a^2-b^2-c^2\right)=-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) \leqslant 0$$

۴۴. اگر همهٔ جمله‌ها را به یک طرف بیاوریم معلوم می‌شود که نابرابری موردنظر با

$$\frac{(x-y)(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}} \geqslant ۰$$

هم‌ارز است.

۴۶. ایدهٔ اصلی اثبات این است: اگر جایگشت (c_i) همانی نباشد، اندیسهایی مانند i و j وجود دارند که $c_i > c_j$ و $i < j$. اکنون با عوض کردن جای c_i و c_j می‌توانیم مقدار مجموع حاصل‌ضربها را بزرگتر کنیم. در حقیقت

$$c_ia_i + c_ja_j - c_ja_i - c_ia_j = (a_i - a_j)(c_i - c_j) < ۰$$

بنابراین، با استفاده از این جابه‌جاییهای دوتایی می‌توانیم جایگشت (c_i) را به جایگشت همانی تبدیل کنیم بی‌آنکه مقدار مجموع حاصل‌ضربها در حین کار کوچکتر شود.

۵۲. پایهٔ استقرا ساده است. اثبات گام استقرایی به‌شکل زیر است:

$$۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n-۱}} + \frac{۱}{\sqrt{n}} < ۲\sqrt{n-۱} + \frac{۱}{\sqrt{n}} < ۲\sqrt{n}$$

زیرا

$$\frac{۱}{\sqrt{n}} < ۲(\sqrt{n} - \sqrt{n-۱}) = \frac{۲}{\sqrt{n} + \sqrt{n-۱}}$$

۵۳. راه‌حل مانند راه‌حل مسألهٔ قبل است (فقط جهت نابرابریها را عوض کنید).

۵۷. می‌توان درستی حالتی را که $n = ۴$، پایهٔ استقرا، «دستی» تحقیق کرد. در مورد گام استقرایی توجه کنید که

$$(n+۱)! = (n+۱)n! > ۲^n(n+۱) > ۲ \times ۲^n = ۲^{n+۱}$$

۵۸. اثبات پایهٔ استقرا، وقتی که $n = ۱$، ساده است. در مورد گام استقرایی توجه کنید که (اگر $n > ۱$)

$$۲^{n+۱} = ۲ \times ۲^n > ۲(۲n) = ۴n > ۲(n+۱)$$

۵۹. **پاسخ:** نابرابری موردنظر به‌ازای هر عدد طبیعی مانند n که $n \geqslant ۱۰$ درست است. **راهنمایی:** می‌توانید درستی آن را به‌ازای nهایی که $۱ \leqslant n \leqslant ۱۰$ مستقیماً تحقیق کنید. برای اثبات گام استقرایی توجه کنید که $۲^{n+۱}$ دو برابر ۲^n است و $(n+۱)^۳$ از $۲n^۳$ کوچکتر است.